周五. 4201 教室

常微分方程的基本概念

1. 阶. (未知数导数最高阶)

2. 线性. 非线性

齐次, 非齐次

3. 方程的解 (显式, 隐式), 积分

通解, 特解, 一切解.

(*) $F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0.$

设 (a,b) 上的 $\varphi(t)$ 满足.

$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \ (\forall t \in (a,b))$

称 $\varphi(t)$ 是方程 (a,b) 上的解

$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$, $x^2+t^2=C$. $x(t) = \pm\sqrt{C-t^2}$ 显式 $(C>0)$.

↳ 隐式解 积分

$\frac{dN}{dt} = \lambda N$, $N(t) = Ce^{\lambda t}$ $(C \in \mathbb{R})$.

n 阶方程 (*) 的解中 n 个独立的常数. 该解为方程 (*) 的通解

$\varphi(t, C_1, \cdots, C_n)$, 并且

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1}, & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2}, & \cdots, & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial C_1} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial C_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial C_2}, & \cdots, & \frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}$$ 在 $(t, C_1, \cdots, C_n)$ 邻域中非零

一般而言, 线性方程 的通解是一切解.

例: $N(t) = e^{C}e^{\lambda t}$ 是通解, 但非一切解

例) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x|}$

通解 $x(t) = \begin{cases} (t+c)^2, & t > -c \\ -(t+c)^2, & t < -c \end{cases}$

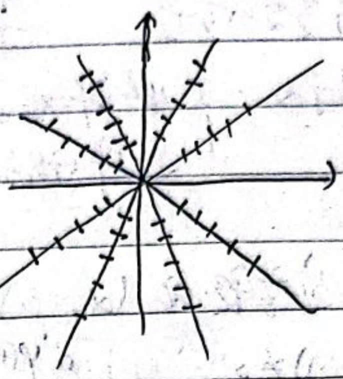
特解 $x(t) \equiv 0$ (满足特定初始条件的解)

4. 解的大致图形~~画等斜~~绘制 → 拟合线

① 方向场

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

$$x = -\frac{1}{k}t$$



② Euler 折线法

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

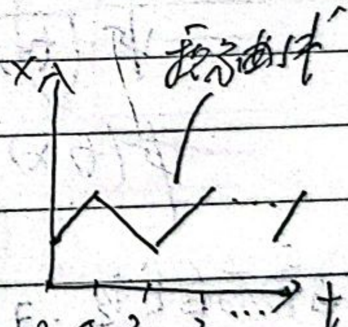
$$\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta} = f(t, x(t))$$

$$x(t+\Delta) = x(t) + \Delta f(t, x(t))$$

$$t = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots, k\Delta, (k+1)\Delta, \cdots$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta f(n\Delta, x_n)$$

$$x_0, x_1, \cdots$$



No.

Date.

第二章 初等解法

一、分离变量法

1. 可目 按另为变量的方程 $\frac{dx}{dt}=f(t)g(x)$，f, g 为各自的变量的连续函数

一切解可表示为 $\begin{cases} 特解\ x=\alpha,\ 其中\ g(\alpha)=0. \\ 通解(积分)\ \int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(s)ds \end{cases}$

设 $\varphi(t)$ 是方程在 (α,β) 上的非常值特解的解

$g(\varphi(t))\neq 0$，　$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(t)\,g(\varphi(t))$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))}=\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt,\quad t, t_0\in(\alpha,\beta)$$

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$$

反之，由 $\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$ 确定隐函数关系 $x=x(t)$

考虑 $\psi(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$

$\psi(t_0,x_0)=0$.

$\psi(t,x)$ 关于 t, x 连续，ψ_x 连续

隐函数存在定理，$\exists\,\delta>0$，当 $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$ 时，有函数 $x=\varphi(t)$

满足 $1^\circ\ x_0=\varphi(t_0)$，$2^\circ\ \psi(t,\varphi(t))=0$

$$\psi(t,\varphi(t))=\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$$

$$\frac{1}{g(\varphi(t))}\frac{d\varphi}{dt}=f(t)$$

2. 通过变量替换求解方程

(A) $\frac{dx}{dt}=f(\frac{x}{t})$ 齐次方程

$g(\lambda t,\lambda x)=\lambda^k g(t,x)$，称 g 为 k 次齐次方程.

引入 $u=\frac{x}{t}$，$x=u\cdot t$，$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot t+u=f(u)$

$\frac{du}{dt}=\frac{f(u)-u}{t}$ $\quad u^*=f(u^*)$

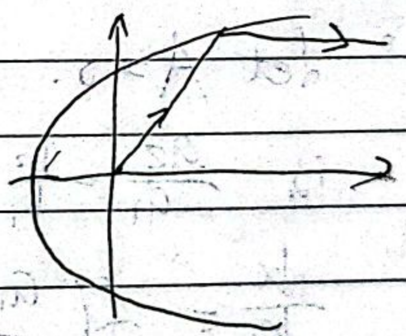
$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dt}{t}+C$ 通积分

$u=u^*$ 特解

例. 探照灯反射镜

$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t+\sqrt{t^2+x^2}}$

是齐次方程



作业: 求解此方程. (已推反射定律)

(B) $\frac{dx}{dt}=f(at+bx+c)$

引入 $y=at+bx+c$

$\frac{dy}{dt}=a+b\frac{dx}{dt}=a+bf(y)$ $\quad \int\frac{dy}{a+bf(y)}=\int dt+C$

$a+bf(y^*)=0$, $y=y^*$.

No.

Date.

③ $\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$

变为齐次方程. $\begin{cases} a_1v+b_1u=a_1t+b_1x+c_1 \\ a_2v+b_2u=a_2t+b_2x+c_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}+\vec{c}$$

1° 若 $A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}+A^{-1}\vec{c}$

$$A^{-1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{vmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$\therefore \frac{du}{dv}=f\left(\frac{a_1v+b_1u}{a_2v+b_2u}\right)$, 齐次方程

2° $\det A=0$.

记 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$.

$$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{k(a_1t+b_1x)+c_2}\right)$$

引入 $y=a_1t+b_1x$

2. 线性方程 $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)$, 其中 P、Q为区间上的连续函数

1° 若 $Q(t)\equiv 0$ 时, 为齐次线性方程

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=0$$

2° ~~$Q(t)\neq 0$ 时, 非齐次线性方程~~

Date. . .

$$\int \frac{dx}{x} = \int p(t)\,dt + C$$

$$\ln|x| = \int p(t)\,dt + C.$$

$$|x| = e^{\int p(t)dt} \cdot e^{c}$$

$$x = \pm e^{c} e^{\int p(t)dt}$$

$$x^* = 0, \quad x(t) = Ce^{\int p(t)dt}$$

2° $Q(t) \neq 0$ 时. 非齐次线性方程

$$e^{-\int p(t)dt} \frac{dx}{dt} - e^{-\int p(t)dt} p(t) x = Q(t) e^{-\int p(t)dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) \cdot e^{-\int p(t)dt} \right) = Q(t) e^{-\int p(t)dt}$$

$$\therefore x(t) e^{-\int p(t)dt} = \int Q(t) e^{-\int p(t)dt} dt + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)dt} \left(C + \int Q(t) e^{-\int p(t)dt} dt \right)$$

常数变易法

作业: 拍照灯. P14. 4. 6.
P31 5, 9. 11

No.

Date.

e.g. Bernoulli方程 $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)x^k$

1° $k=0,1$. 利用常数变易法进行计算

2° $k\neq 0,1$, 引入 $y=x^{1-k}$, $\frac{dy}{dx}=(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}$

$$(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}+p(t)x(1-k)x^{-k}=Q(t)(1-k)$$

$$\frac{dy}{dx}+p(t)(1-k)y=\underline{Q(t)(1-k)}$$ 线性方程

例. Riccati方程

$$\frac{dx}{dt}+a(t)x+b(t)x^2=c(t)$$

设 $\varphi(t)$ 是上述方程的一个解

$$\frac{d\varphi}{dt}+a(t)\varphi+b(t)\varphi^2=c(t)$$

$$\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}+a(t)(x-\varphi)+b(t)(x^2-\varphi^2)=0$$

引入 $y=x-\varphi$.

$$\frac{dy}{dt}+a(t)\varphi+b(t)(y+2\varphi)y=0$$

$$\frac{dy}{dt}+\left(a(t)+2b(t)\varphi(t)\right)y+b(t)y^2=0.$$

为Bernoulli方程

例 $\frac{dx}{dt}\left(e^{-\frac{1}{x}}+\frac{t}{x^2}\right)=1$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}t+e^{-\frac{1}{x}},\quad t=e^{-\frac{1}{x}}(C+x)$$

No.

Date.

例. $\frac{dx}{dt}=kx+f(t)$，$f(t)$为周期函数 $f(t)=f(t+\omega)$

证：方程存在且仅存在一个周期为ω的解. 并求这个解

$x(t)=Ce^{kt}+\int_0^t e^{k(t-s)}f(s)ds$. 常数变易公式

$x(t)=x(t+\omega)$

特别地，$t=0$，$x(0)=x(\omega)$.

$x(t)$是上述方程的解

$x(t+\omega)$也是上述方程的解

令 $u(t)=x(t)-x(t+\omega)$

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=ku \\ u(0)=0\end{cases} \Rightarrow u(t)=0$$

$\Rightarrow x(t)=x(t+\omega)$.

三. 全微分方程和积分因子

$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$.

$M(t,x)dt-N(t,x)dx=0$.

$M(t,x)$，$N(t,x)$在单连通区域内有连续的一阶偏导数

$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$ （充要条件）

则（*）可以写成全微分方程的形式，即存在 $u(t,x)$，$du(t,x)=0$

方程（*）的通积分为 $u(t,x)=C$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=M(t,x)$$

$$u(t,x)=\int M(t,x)dt+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=N(t,x)=\int\frac{\partial M}{\partial x}dt+\varphi'(x)$$

$$\varphi(x)=\int N(t,x)dx-\iint\frac{\partial M}{\partial x}dtdx$$

例. $\frac{dx}{dt}=-\frac{e^t+x}{\cos x+t}$

$(e^t+x)\,dt+(\cos x+t)\,dx=0$

$\frac{\partial u}{\partial t}=e^t+x.\quad u(t,x)=\int(e^t+x)\,dt+\varphi(x)$

$=e^t+xt+\varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x+t=t+\varphi'(x)$

$\varphi'(x)=\cos x,\ \varphi(x)=\sin x$

$u(t,x)=xt+e^t+\sin x=C$ 是方程的通积分

$\mu(t,x)$ 满足 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

$\mu M\,dt+\mu N\,dx=0$ 是全微分方程的方程

积分因子

① 凑.

② $\frac{\partial \mu}{\partial x}M+\mu\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial t}N+\mu\frac{\partial N}{\partial t}$

求PDE

$\mu(t,x)\equiv\mu(t)$ 仅与 t 有关 与 x 无关

$-\mu\frac{\partial N}{\partial t}+\mu\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial t}N$

$\frac{d\mu(t)}{dt}=\underbrace{\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)}_{\text{仅与 } t \text{ 有关, 与 } x \text{ 无关}}\mu$ 一阶线性方程

作业 P33 、 4题

No.

Date.

(四) 参数法解 t 的一阶方程

1. 例 $(\dot{x})^2+2t\dot{x}+t^2-x^2=0$.

2. $x=f(t,\dot{x})$ 型

引入 $p=\dot{x}$. $x=f(t,p)$ $\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}$

解出 $p=\varphi(t,c)$

$x=f(t,\varphi(t,c))$

通解积分

解出 $\begin{cases} t=\eta(p,c) \\ x=f(t,p) \end{cases}$，$p$ 为参数

以 p 为参数形式

3. $t=g(x,\dot{x})$ 型

引入 $p=\dot{x}$， $t=g(x,p)$. $\frac{1}{p}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dx}$

$p=\psi(x,c)$

通积分：$t=g(x,\psi(x,c))$

例：$x=t\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)+\psi\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 令 $p=$

看看不做

作业 P32. 15. 20, 21, 22, 26, $\boxed{28, 29}$,

P33 38

P40. 3. 6. 15

四 高阶方程的降阶

(*) $F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0$, $n \geq 2$.

(一). 方程(*)不显含未知函数

$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$, $n \geq k \geq 1$.

引入 $y = x^{(k)}$, $F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$

例: $m\ddot{x} = F = G - W - c\dot{x}$

引入 $y = \dot{x}$, $m\dot{y} = G - w - cy$.

(二) 方程(*)中不显含自变量

$F(x, x', x'', \cdots, x^{(k)}) = 0$

$\dot{x} = y$.

$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$

$\dddot{x} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dt}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$

(三). 齐次方程的降阶

$F(t, kx, kx', \cdots, kx^{(n)}) = k^m F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$

$F \sim m$ 次齐次方程

$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$.

$x^m F\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \cdots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0$

$\frac{x'}{x} \to y$, $\frac{x''}{x} \to y' + y^2$

引入 $y = \frac{x'}{x}$, $x' = yx$

$x = e^{\int y\,dt}$

$x' = y e^{\int y\,dt}$

$x'' = (y' + y^2)e^{\int y\,dt}$

$\frac{x''}{x} = y' + y^2$

可以降一阶

No.

Date.

(四) 全微分方程及积分因子

例. $x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$

$x=0$ 常值特解，不妨设 $x\neq0$

两边同除 x^2，得 $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=Cx.$$

(五) 常微分方程组首次积分

概念：(※) $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$，其中 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\vec{f}(t,\vec{x})=(f_1(t,\vec{x}),\cdots,f_n(t,\vec{x}))^T$

设 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 是方程(※)的解，$t\in(\alpha,\beta)$，且有一函数 $\Phi(t,\vec{x})$

在 D 上具有连续一阶偏导数，非常值特解。

若 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))=C$，$(\forall t\in(\alpha,\beta))$ 则称 $\Phi(t,\vec{x})=C$ 为方程组(※)

的一个首次积分

定理：若 $\Phi(t,\vec{x})$ 是非常值函数并具有连续一阶偏导数，$\Phi(t,\vec{x})$ 是方程组(※)的

首次积分的充要条件为 $\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial x_i}f_i(t,\vec{x})=0$ $(\forall\ t\in D)$

证：充分性，设 $\vec{\varphi}(t)$ 是方程组的任一解，要证 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))=C$

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t,\vec{\varphi}(t)))=\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial t}\Big|_{(t,\vec{x})=(t,\vec{\varphi}(t))}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial x_i}\Big|_{(t,\vec{x})=(t,\vec{\varphi}(t))}\cdot\frac{d\varphi_i}{dt}$$

$\frac{d\varphi_i}{dt}=f_i(t,\vec{\varphi})$

$$\equiv 0$$

从而 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))=C$

必要性：反过来

例. 单摆模型 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$

引入 $y = \frac{d\varphi}{dt}$, $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = y \end{cases}$

$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{-\frac{g}{l}\sin\varphi} \Rightarrow d\varphi \cdot \sin\varphi \cdot -\frac{g}{l} = y\,dy$

$\therefore \cos\varphi \cdot \frac{g}{l} = \frac{1}{2}y^2 + C$

$\Phi(y,\varphi) \triangleq \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi = C$

1° 设 $\phi(t,\vec{x}) = C$ 是方程组 (#) 的一个首次积分

则可以把方程组 (#) 降一维

若不妨设 $\frac{\partial\phi}{\partial x_n} \neq 0$，隐函数存在定理，$x_n = \omega(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, C)$

2° n维的方程组 (#) 来讲，则若有 n 个独立的首次积分 $\phi_i(t,\vec{x}) = C_i$,

$i = 1, 2, \cdots, n$, $\left|\frac{\partial\phi_i(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right| \neq 0$

例: $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y & ① \\ \dot{y} = 4x + 3y & ② \end{cases}$

① ×2 − ②

$2\dot{x} - \dot{y} = -2x + y$

$(2x - y) = C_1 e^{-t}$

例: $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$

由 ① $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = C_1 x$ 方程组的解

② $\frac{2x\,dx}{4x^2z} = \frac{2y\,dy}{4y^2z} = \frac{2z\,dz}{2z(z^2 - x^2 - y^2)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2z(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dx}{2xz}$

$\Rightarrow x = C_2(x^2 + y^2 + z^2)$

No.

Date.

第二章 常系数线性方程

(L) $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$. 常系数2阶齐次线性方程

$\dot{x}=ax$, 解 $x(t)=ce^{at}$

设 $e^{\lambda t}$ 是方程 (L) 的解. 则 $\lambda^2e^{\lambda t}+a_1\lambda e^{\lambda t}+a_2e^{\lambda t}=0$

特征方程.

(一) 复值函数 与复值解

1° 设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是 (α,β) 上的实值函数. $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是复值函数 定义域 (α,β)

2°, $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)\triangleq\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)$.

3° 连续性 $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z(t_0)$

4°, 导数. $z'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t)$

5° 积分 $\int_a^b z(t)dt=\int_a^b\varphi(t)dt+i\int_a^b\psi(t)dt$

若复值函数 $z(t)$ 满足 方程 (L). $z(t)$ 是复值解.

引理. 设 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 为方程上的解 则 $c_1z_1(t)+c_2z_2(t)$ 亦是方程 (L) 的解.

P50 5. P51 7. 12 P62 3. 5. 8 10.

$(*)\ \ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0.$

特征方程 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0.$

$\frac{d^2x}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt}+\lambda_1\lambda_2 x=0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1\right)-\lambda_2\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1\right)=0.$

$\frac{dx}{dt}-\lambda_1=C_1e^{\lambda_2 t}$

$\frac{dx}{dt}-\lambda_2x=C_2e^{\lambda_1 t}$

特别地 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时. $x(t)=\frac{C_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}+\frac{C_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}$

$=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},\ C_1,C_2\in\mathbb{C}$

当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时. $\frac{dx}{dt}-\lambda t=C_1e^{\lambda t}$

$x=e^{\lambda t}\left(C_2+\int C_1e^{\lambda t}e^{-\lambda t}dt\right)$

$=e^{\lambda t}(C_2+C_1t),\ C_1,C_2\in\mathbb{C}$

定理2.1: 方程 $(*)$ 的一切复数通解可表示为 $x=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1\neq\lambda_2\\ e^{\lambda t}(C_1t+C_2) & \lambda_1=\lambda_2=\lambda\end{cases}$

$C_1,C_2\in\mathbb{C}.$

定理2.2 方程 $(*)$ 的一切实数通解可表示为

$x(t)=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1\neq\lambda_2,\ 实\\ (C_1t+C_2)e^{\lambda t}, & \lambda_1=\lambda_2=\lambda\ 实.\\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t) & \lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta\end{cases}$

证明. $x(t)=\overline{x(t)}$ $\quad\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=\overline{C_1}e^{\lambda_2 t}+\overline{C_2}e^{\lambda_1 t}$

$(C_1-\overline{C_2})e^{\lambda_1 t}=(\overline{C_1}-C_2)e^{\lambda_2 t}$

$(C_1-\overline{C_2})=(\overline{C_1}-C_2)e^{-2i\beta t}$, 左右关于 t 求导

$0=(\overline{C_1}-C_2)(-2i\beta)e^{-2i\beta t}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 从而 $\overline{C_1}=C_2$

……

No.

Date.

例. 求下列方程的通解或特解
(A) $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$.
(B) $\dot{x}+2x+\int_0^t x(s)ds=0$
解: (B) 求导, $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$.
$x=(c_1+c_2t)e^{-t}$
$\dot{x}(0)+2x(0)=0$. 得 $c_1=-c_2$

定理2.3
(CP): $\begin{cases}\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0\\ x(0)=s_0,\ \dot{x}(0)=v_0\end{cases}$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在且唯一.

(证明) 1° $\lambda_1\neq\lambda_2$ 实. $x(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$
$\begin{cases}x(0)=c_1+c_2=s_0\\ \dot{x}(0)=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=v_0\end{cases}$ $\begin{vmatrix}1&1\\ \lambda_1&\lambda_2\end{vmatrix}\neq0$

例: $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+ta_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0$, $t\neq0$
Euler方程
$\begin{cases}t^2\lambda^2+ta_1\lambda+a_2=0\\ \lambda_{1,2}=\cdots\end{cases}$

引入 $s=\ln|t|$
$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{t}$ $\quad t\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}$
$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$
$=-\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds}+\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{ds^2}$

于是 $\frac{d^2x}{ds^2}+(a_1-1)\frac{dx}{ds}+a_2x=0$
$x(s)=\begin{cases}c_1|t|^{\lambda_1}+c_2|t|^{\lambda_2} & \lambda_1\neq\lambda_2\\ (c_1+c_2\ln|t|)\cdot|t|^{\lambda} & \lambda_1=\lambda_2\\ |t|^{\alpha}\left(c_1\cos(\beta\ln|t|)+c_2\sin(\beta\ln|t|)\right)\end{cases}$

No.

Date.

对于方程(大)，在什么条件下方程的一切解

1° $\to 0$ $(t\to+\infty)$

2° 有界的 $(t>0)$

3° 存在有界解

定理2.3. $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t)$

$$x(t)=\begin{cases} C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot e^{\lambda_2 t}+\int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds, & \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ 实} \\ (C_1+C_2t)e^{\lambda t}+\int_0^t (t-s)\,e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds, & \lambda_{1,2}=\lambda \\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)+\int_0^t \frac{e^{\alpha(t-s)}}{\beta}\sin\beta(t-s)f(s)\,ds, & \lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta \end{cases}$$

常数变易公式

Proof: $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt}+\lambda_1\lambda_2=f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)-\lambda_2\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)=f(t)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}-\lambda_1x=C_1e^{\lambda_2t}+\int_0^t e^{\lambda_2(t-s)}f(s)\,ds$$

$$\frac{dx}{dt}-\lambda_2x=C_2e^{\lambda_1t}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)}f(s)\,ds$$

1° $\lambda_1\neq\lambda_2$, 实 $\quad (\lambda_2-\lambda_1)x=C_1e^{\lambda_2t}-C_1e^{\lambda_1t}+\int_0^t\left(e^{\lambda_2(t-s)}-e^{\lambda_1(t-s)}\right)f(s)\,ds$

2° $\lambda_{1,2}=\lambda$,

$$\frac{dx}{dt}-\lambda x=C_1e^{\lambda t}+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds\triangleq F(t)$$

$$x(t)=C_2e^{\lambda t}+\int_0^t e^{\lambda(t-p)}\left[C_1e^{\lambda p}+\int_0^p e^{\lambda(p-s)}f(s)\,ds\right]dp$$

$$=C_2e^{\lambda t}+C_1t\cdot e^{\lambda t}+\int_0^t\int_0^p e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds\,dp$$

$$\int_0^t\int_s^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,dp\,ds$$

No.

Date.

$= (C_2+C_1t)e^{\lambda t} + \int_0^t (t-s)e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$

$x(t) = x_1(t) + x^*(t)$.

$x^*(t) = \int_0^t K(t-s)\, f(s)\, ds$

$K(t)$ 满足 $\ddot{K}(t) + a_1\dot{K}(t) + a_2K(t)=0$

$K(0)=0,\ \dot{K}(0)=1$.

P83. 1(3)(8)　P84. 3.4.(6).(13)，(16)　思考 思考 不作

三. n阶常系数线性方程

(*) $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_nx = f(t)$

$f(t)=0$ 齐次　$f(t)\neq 0$，非齐次

(C) $L_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$,

(C) 为(*)的特征方程. $L_n(\lambda)$ 为n次特征多项式

$L_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\underbrace{(\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1})}_{L_{n-1}(\lambda)}$

定理 3.1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 (C)的s个特征根，对应重数为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 且 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$，则齐次方程的所有解可以表示为

$x(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t} p_i(t)$，其中 $p_i(t)$ 是任意 n_i-1 次的多项式

证：用归纳法证. 特别地 n=1, 2

假设 n-1 阶方程常系数情况都有以上结论.

$L_n(\lambda) = L_{n-1}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_1)$，其中 λ_1 为 (C) 的一个特征根

$0 = L_n(D)x = L_{n-1}(D)(D-\lambda_1)x$，其 $D=\frac{d}{dt}$

$L_{n-1}(\dot{x}-\lambda x) = 0$.

$\dot{x}-\lambda x = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t}\widetilde{p_i(t)}$，其中 $\widetilde{p_i(t)}$ 为 n_i-1 次多项式 $(i\neq 1)$

$\dot{x}-\lambda_2 x = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_2(t)}\widetilde{p_i(t)}$，其中 $\widetilde{p_i(t)}$ 为 n_i-2 次多项式 $(i=2)$

$(\lambda_2-\lambda_1)x=\sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t}\left(\widetilde{p_i(t)}-p_i(t)\right)$

$x(t)=\sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t}\cdot\frac{\widetilde{p_i(t)}-p_i(t)}{\lambda_2-\lambda_1}$

定理 3.2 ，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 (c) 特征根(实)，$n_1,\cdots,n_s$ 为其重数

$\alpha_1\pm i\beta_1,\cdots,\alpha_p\pm i\beta_p$ 为 (c) 特征复根，$m_1,\cdots,m_p$ 为其重数

$\sum n_i+2\sum m_i=s$，则通解表示为

$x(t)=\sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t}p_i(t)+\sum_{i=1}^{p} e^{\alpha_i t}\left[\underbrace{M_i(t)\cos\beta_i t+N_i(t)\sin\beta_i t}_{\text{任意 } m_i-1 \text{ 次实多项式}}\right]$

非齐次方程(非)通解

$x(t)=x_1(t)+x^*(t)$

$x^*(t)=\int_0^t k(t-s)f(s)\,ds$

$(IP)\begin{cases} k^{(n)}(t)+a_1k^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nk(t)=0 \\ k(0)=0,\ k'(0)=0,\ \cdots,\ k^{(n-2)}(0)=0,\ k^{(n-1)}(0)=1 \end{cases}$

例 ① 求解：$x^{(4)}+2\ddot{x}+x=0$.

$x^{(4)}+2\ddot{x}+x=t$

① $e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ te^t\cos t,\ te^t\sin t$ 构造方程，阶数尽量低

四. 算子法求特解

$D=\frac{d}{dt}$，$\dot{x}(t)=f(t)$，令 $\frac{1}{D}=\int\cdot\,dt=D^{-1}$

~~$Dx(t)=Df$~~ 则 $x^*(t)=\frac{1}{D}f(t)$

$P_n(D)x=f(t)$，其中 $P_n(\lambda)$ 为关于 λ 的 n 次多项式

$x^*=\frac{1}{P_n(D)}f(t)$

性质: 1° $\frac{1}{P(D)}[C_1 f(t)+C_2 g(t)] = C_1\frac{1}{P(D)}f(t)+C_2\frac{1}{P(D)}g(t)$

2° $P(D)=P_1(D)P_2(D) \Rightarrow \frac{1}{P(D)} = \frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_2(D)}$

3°. $\frac{1}{P(D)}\cos\beta t = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\right\}$

$\frac{1}{P(D)}\sin\beta t = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\right\}$

逆算子计算公式:

1° $P(\lambda)\neq 0$. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t} = \frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$

2° 若 $P(-\beta^2)\neq 0$, $\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t = \frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t$, $\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t = \frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t$

$\frac{1}{P(D^2)}\left[\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right]$

P95, 1(1)(2)(3) P96 5.(1), 7, 1

3°. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

证: 对 $P(D)$ 的次数归纳

1° 当 $n=1$ 时. $P(D)=D-a$,

$$(D-a)\left[e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)\right] = \lambda e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) + e^{\lambda t}D\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) - a_1 e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$$
$$= e^{\lambda t}[\lambda+D-a_1]\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) = e^{\lambda t}f(t)$$

2° 设 $n-1$ 时成立, $P_n(D)=P_1(D)\cdot P_{n-1}(D)$

于是 $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t) = \frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_{n-1}(D)}e^{\lambda t}f(t) = \frac{1}{P_1(D)}e^{\lambda t}\frac{1}{P_{n-1}(D+\lambda)}f(t)$

$$= e^{\lambda t}\frac{1}{P_1(D+\lambda)}\frac{1}{P_{n-1}(D+\lambda)}f(t) = e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$$

No.

Date.

例：求解 $(D^4-4D^3+6D^2-4D+1)x(t)=(t+1)e^t$.

$(D-1)^4 x(t)=(t+1)e^t$

$x(t)=x_1(t)+x^*(t)$ $(\lambda-1)^4=0$.

则通解：$x_1(t)=(C_1+C_2t+C_3t^2+C_4t^3)\cdot e^t$.

特解 $x(t)=\frac{1}{(D-1)^4}e^t(t+1)$.

$=e^t\cdot\frac{1}{D^4}(t+1)$

$=e^t\left(\frac{t^5}{5!}+\frac{t^4}{4!}\right)$

例：$\frac{1}{D-a}f(t)$

$=\frac{1}{D-a}e^{at}e^{-at}f(t)$

$=e^{at}\cdot\frac{1}{D}e^{-at}f(t)$

$=e^{at}\cdot\int e^{-as}f(s)\,ds$

例. $\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{1}{D}(e^{at}\sin bt)=e^{at}\frac{1}{D+a}\sin bt$

$=e^{at}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{D+a}\cdot e^{ibt}\right\}$

$=e^{at}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{a+ib}e^{ibt}\right\}$

$=e^{at}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{a-ib}{a^2+b^2}(\cos bt+i\sin bt)\right\}$

$=e^{at}\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos bt+\frac{b}{a^2+b^2}\sin bt\right)$

例：若 $P(\lambda)=0$, $P(D)=(D-\lambda)^s g(D)$, $g(\lambda)\neq 0$.

$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{(D-\lambda)^s}\cdot\frac{1}{g(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{(D-\lambda)^s}\cdot\frac{1}{g(\lambda)}e^{\lambda t}$

$=\frac{1}{g(\lambda)}\frac{1}{(D-\lambda)^s}e^{\lambda t}=\frac{1}{g(\lambda)}\cdot e^{\lambda t}\cdot\frac{1}{D^s}\cdot 1=\frac{1}{g(\lambda)}\cdot e^{\lambda t}\cdot\frac{1}{s!}\cdot t^s$

4°. $f_k(t)$ → k次多项式 $\frac{1}{P(D)}f_k(t)=Q_k(D)f_k(t)$

其中满足 $1=P(\lambda)\cdot Q_k(\lambda)+R_{k+1}(\lambda)$，$R_{k+1}(\lambda)$表示最低次数为k+1的多项式

证: $I = P(D) Q_k(D) + R_{k+1}(D)$

$f_k(t) = P(D) Q_k(D) f_k(t) + \underbrace{R_{k+1}(D) \cdot f_k(t)}_{} = 0$

例: 求解 $(D^3 - D)x = t$.

$x = x_1 + x^*(t)$ $\qquad \lambda^3 - \lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

$\therefore x_1 = C_1 + C_2 \cdot e^t + C_3 \cdot e^{-t}$

$x^*(t) = \frac{1}{D^3 - D} t = -\frac{1}{D} \frac{1}{1-D^2} t = -\frac{1}{D}(1 + D^2 + D^4 \cdots) t$

$= -\frac{1}{D} t = -\frac{t^2}{2}$

例 $(D^2 + 2D + 1)x = t^2$

特解 $x = \frac{1}{(D+1)^2} t^2$

$= \cancel{\frac{1}{D+1} \cdot (1 - D + D^2 - \cdots) \cdot t^2}$

$= (1 - D + D^2)(1 - D + D^2) t^2$

$= t^2 - 2D t^2 + 3D^2 t^2$

$= t^2 - 4t + 6$

例. $(D^2 + 1)\, x(t) = t\, e^t \sin t$

特解 $x(t) = \cancel{\frac{1}{D^2+1} \operatorname{Im} e^{it}}$

$= \frac{1}{(D+1)^2} t \cdot e^t \cdot \sin t$

$= e^t \cdot \frac{1}{1 + (D+1)^2} \cdot t \sin t$

$= e^t \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2 + 2D + 2} \cdot t \cdot e^{it} \right)$

$= e^t \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \frac{1}{(D+i+1)^2 + 1} \cdot t \right\}$

$= e^t \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \cdot \frac{1}{1 + 2i + 2(1+i)D + D^2} t \right\}$

$= e^t \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \cdot \left(\frac{1}{1+2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2} D + \cdots \right) t \right\}$

Date.

第三章、常系数线性方程组

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$ $\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$

$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = (a_{ij}(t))_{n\times n}$. 矩阵函数值. (向量值函数)

$A(t) = A$ 常系数

$\vec{f}(t) = 0$ 齐次方程组

$n=1$. $\frac{dx}{dt} = ax + f(t)$

$x = Ce^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s)\,ds$

$n>1$ 时 $\vec{x}(t) = ?$

$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 = f(t)$

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_2x - a_1y + f(t) \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

特征方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}(t) = C\cdot e^{At}$

1. 基本概念工具

1° $A(t)$, $\vec{f}(t)$ 连续性 可导(积)性.

$\dot{A}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = (\dot{a}_{ij}(t))$

2° $\int_\alpha^\beta A(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\,dt\right)_{n\times m}$

3° $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

No.

Date.

T21 $([A(t)]^2)' = A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$

4°. $\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = ?$

$A(t)A^{-1}(t) = I$. $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

则 $A'(t)\cdot A^{-1}(t) + A(t)\cdot (A^{-1}(t))' = 0$

$(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$

5°. 向量范数 矩阵范数

运算 $\|\cdot\|$，在 $\mathbb{R}^n$ 中满足如下性质，

1° $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2° $\|\lambda\cdot\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

3° $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

则称之为 $\mathbb{R}^n$ 中的范数.

例. (A). $\|\vec{x}\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 1-范数

(B). $\|\vec{x}\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 2-范数

(C) $\|\vec{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ p-范数

(D) $\|\vec{x}\|_\infty \triangleq \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$, ∞-范数

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

性质. (2). $\mathbb{R}^n$ 中的范数均是等价的，即 $c_1\|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_A \leq c_2\|\cdot\|_B$

其中 $c_{1,2} > 0$, $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 中的范数

~~$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ 在 $\|\vec{x}\|_2$~~

HK P 103 1,3,5

CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

设$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$中任意范数，要证明 $f(\vec{x})=\|\vec{x}\|$ 在$\mathbb{R}^n$中关于$\|\cdot\|_2$是连续的，连续函数$f(\vec{x})$ 在$\|\vec{x}\|_2=1$ 可取到最大值。

$\forall \vec{y}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{y}\neq\vec{0}$，$\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_2}\in\{\|\vec{x}\|_2=1\}$

$m\le f(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_2})\le M$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{\vec{x}_m\}\subset\mathbb{R}^n$，$\|\vec{x}_m-\vec{x}_0\|_2\to0$ $(m\to+\infty)$。

要证 $|f(\vec{x}_n)-f(\vec{x}_0)|\to0$ $(n\to\infty)$

~~$|f($~~ $|f(\vec{x}_n)-f(\vec{x}_0)|=|\|\vec{x}_m\|-\|\vec{x}_0\||\le\|\vec{x}_m-\vec{x}_0\|$

$\vec{x}_m=x_m^1\vec{e}_1+x_m^2\vec{e}_2+\cdots+x_m^n\vec{e}_n$，$\vec{x}_0=x_0^1\vec{e}_1+\cdots+x_0^n\vec{e}_n$

$\|\vec{x}_m-\vec{x}_0\|=\|\sum_{j=1}^n(x_m^j\vec{e}_j-x_0^j\vec{e}_j)\|$

$\le\sum_{j=1}^n|x_m^j-x_0^j|\|\vec{e}_j\|$

$\triangleq\langle\vec{u}_m,\vec{E}\rangle$

其中 $\vec{u}_m=(\ldots,x_m^j-x_0^j,\ldots)^T$

$\vec{E}=(\ldots,\|\vec{e}_j\|,\ldots)^T$

$\langle\vec{u}_m,\vec{E}\rangle\le\|\vec{u}_m\|_2\cdot\|\vec{E}\|_2$

而$\|\vec{u}_m\|_2\to0$，$\|\vec{E}\|_2$有界

由向量范数诱导出矩阵范数

对任意 $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$\|A\|\triangleq\sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{x}\neq0}\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$

$\|A\|$称为矩阵范数

① $\|A\vec{x}\|\le\|A\|\cdot\|\vec{x}\|$

② $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

一方面. $\|A\vec{x}\| \le \|A\|\|\vec{x}\|$ 则对 $\forall \|\vec{x}\|=1$

$\sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \le \|A\|$

另一方面. $\forall \vec{y} \ne \vec{0}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$, $\left\|A\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right\| \le \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

由 $\vec{y}$ 的任意性. 所以 $\|A\| \le \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

例 $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right\} = \boxed{(1,\infty,2)}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right\}$

证 ③ $\|A\vec{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|\right\}$

$\le \max_{1\le i\le n} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|\right\}$

$\le \max_{1\le i\le n} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right\} \max_{1\le i\le n} \left\{|x_i|\right\}$

$\|A\|_\infty = \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\| \ne 0}} \frac{\|A\vec{x}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \ge \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

限于 $\|\vec{x}\|_\infty = 1$

取 $\vec{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)^T \in \{\|\vec{x}\|_\infty = 1\}$

令 $x_j^k = \begin{cases} 1, & a_{ij} \ge 0 \\ -1, & a_{ij} < 0 \end{cases}$

③ $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

$$\|AB\vec{x}\| \le \|\vec{A}\|\cdot\|B\vec{x}\| \le \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\|\vec{x}\|$$

$$\frac{\|AB\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|$$

$$\Rightarrow \|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$$

④ $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$

$$\begin{aligned}\|A\vec{x}\|_2^2 &= \langle A\vec{x}, A\vec{x}\rangle \\ &= \langle A^TA\vec{x}, \vec{x}\rangle \\ &\le \|A^TA\vec{x}\|_2\cdot\|\vec{x}\|_2 \\ &\le \|A^T\|_2\cdot\|A\vec{x}\|_2\cdot\|\vec{x}\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le \|A^T\|_2$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \le \|A^T\|_2$$

⑤ $\left\|\int_\alpha^\beta A(s)\,ds\right\| \le \left|\int_\alpha^\beta \|A(s)\|\,ds\right|$

△ e^{At} 的级数展开

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$$

数项级数　函数项级数收敛性

$\{S_n\} \to S,\ (n\to+\infty)$　$\|S_n - S\| \to 0\ (n\to+\infty)$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} A_j$　(部分和)

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k t^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{m}\frac{\|A^k\cdot t^k\|}{k!} \le \sum_{k=0}^{m}\frac{\|A^k\|\,\|t^k\|}{k!} \le e^{\|A\|\cdot\|t\|}$$

由m任意性. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ 在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛.

$$A\int_0^t e^{As}\,ds = A\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k s^k}{k!}\,ds = A\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t \frac{A^k s^k}{k!}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= e^{At} - I$$

① $\frac{d}{dt}e^{At} = A\cdot e^{At} = e^{At}\cdot A$

② $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

$\Leftrightarrow e^{At}\cdot e^{-At} = I,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^{-At}\right) = A\cdot e^{At}\cdot e^{-At} + (-A)\cdot e^{At}\cdot e^{-At}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow e^{At}\cdot e^{-At} = C$

令$t=0$ 则 $C=I$

③ $(CP)\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0\end{cases}$ 的解在$(-\infty,+\infty)$上存在且唯一.

$$e^{-At}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} - Ae^{-At}\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\cdot\vec{x}(t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-At}\cdot\vec{x}(t) = \vec{C} \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{At}\cdot\vec{C}$$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

而 $\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$

$\therefore \vec{x}(t)=e^{At}\cdot e^{-At_0}\cdot\vec{x_0}$

设 $\vec{x}(t)$，$\vec{y}(t)$ 是 (CP) 的解

$\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ 也是 (CP) 的解

$\vec{x}(t_0)-\vec{y}(t_0)=0$

$\vec{x}(t)=\vec{y}(t)$

$$\vec{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\cdot\vec{x_0}=e^{At}\cdot e^{-At_0}\cdot\vec{x_0}$$

④ $e^{A(t+s)}=e^{At}\cdot e^{As}$

作业："1-花书" "2-方程"

Prob 1

$$(CP)\begin{cases}\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\\ \frac{d\vec{x}}{dt}-A\vec{x}=\vec{f}(t)\end{cases}$$

$$e^{-At}\frac{d\vec{x}}{dt}-e^{-At}A\vec{x}=e^{-At}\vec{f}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\cdot\vec{x}(t)\right)=e^{-At}\vec{f}(t)$$

$$e^{-At}\vec{x}(t)-e^{-At_0}\vec{x_0}=\int_{t_0}^{t}e^{-As}\vec{f}(s)\,ds$$

$$\vec{x}(t)=\underbrace{e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}}_{\text{齐次方程的解}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t-t_0}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)\,ds}_{\text{非齐次方程的特解}}$$ 常数变易法

唯一性：不妨设 $\vec{y}(t)$ 是 (CP) 的解，$\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ 也是齐次方程的解

$\Rightarrow \vec{x}(t)-\vec{y}(t)=\vec{0}$

e^{At} 的计算 $\qquad e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$

例. ① $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$$e^{At}=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t})$$

② $A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix}e^{A_1}&&&\\&e^{A_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{A_s}\end{pmatrix}$

③ $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=0$, $\lambda=\pm i$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$$A=P\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$AP=P\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$$A(\vec\beta_1\ \vec\beta_2)=(\vec\beta_1\ \vec\beta_2)\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{cases}A\vec\beta_1=i\vec\beta_1\\A\vec\beta_2=-i\vec\beta_2\end{cases}\Rightarrow\vec\beta_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\quad\vec\beta_2=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}$

$\therefore e^{At}=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{i}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}$

④ $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right)t=e^{\lambda t}\cdot t$$

$$e^{A}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\cdot t\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

⑤ $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{bmatrix}=\lambda I+B.$

$$e^{At}=e^{(\lambda I+B)t}=e^{\lambda I t}\cdot\lambda^{Bt}$$

$$=e^{\lambda t}\cdot e^{Bt}=e^{\lambda t}\left[I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}B^{n-1}t^{n-1}\right]$$

$$\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\ & e^{\lambda t} & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\\ & & & & te^{\lambda t}\\ & & & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

$\vec{x}(t)=e^{At}\cdot e^{-At_0}\cdot\vec{x}_0=e^{At}\cdot\vec{c}$ (通解形式)

$P^{-1}AP=J$

$A=PJP^{-1}$

$\vec{x}(t)=Pe^{Jt}\cdot P^{-1}\vec{c}$

No.

Date.

$$\vec{x}(t) = Pe^{Jt}\underbrace{P^{-1}\vec{c}}_{\vec{c}} = Pe^{Jt}\cdot\vec{c} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{p_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{p_2}$$ (若可对角化)

例 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x+y \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$ $\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = (\vec{p_1}, \vec{p_2})\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A-2I)\vec{p_1} = \vec{0}$, $(A-I)\vec{p_2} = 0$

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \vec{c} = \cdots$

若A可对角化,

向 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为其特征值, $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \cdots, \vec{p_n}$ 为特征向量

则 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解可表示成

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\vec{p_i}, \quad C_i \in R$$

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ $\quad \vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\vec{p_i}, C_i \in R$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = -1$.

o.

ale.

T例. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

实值通解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} (\vec{p_1} \ \vec{p_2}) \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in R$

T例: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1$

$(A - I)\vec{p_1} = \vec{0}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{p_1} = \vec{0}$

$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x(t)} = P e^{Jt} \cdot \vec{C}$

$= (\vec{p_1}, \vec{p_2}) \cdot \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

$= C_1 \cdot e^t \vec{p_1} + C_2 e^t [t\vec{p_1} + \vec{p_2}]$, $C_{1,2} \in R$

一般地, $P^{-1}AP = J$

其中 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$, $P = (P_1, \cdots, P_s)$

$P_i = (\vec{p_{i1}}, \cdots, \vec{p_{in_i}})$ $\quad J_i \sim n_i \times n_i$ 阶

$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_{i}) = (P_1, \cdots, P_{i}) J.$$

$$AP_i = P_i J_i$$

$$A(\vec{P_{i1}}, \cdots, \vec{P_{in_i}}) = (P_{i1}, \cdots, P_{in_i}) \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\vec{P_{i1}} = \lambda_i \vec{P_{i1}} \\ A\vec{P_{i2}} = \lambda_i \vec{P_{i2}} + \vec{P_{i1}} \\ \vdots \\ A\vec{P_{in_i}} = \lambda_i \vec{P_{in_i}} + P_{in_i-1} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(A-\lambda_i)\vec{P_{i1}} = 0 \\ &\vdots \\ &(A-\lambda_i I)\vec{P_{in_i}} = \vec{P_{in_i-1}} \end{aligned}$$

$$x(t) = P e^{Jt} \vec{C}$$

$$= (\cdots\ P_i\ \cdots) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & e^{J_i t} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ C_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= (\cdots\ \vec{P_{i1}}, \vec{P_{i2}}, \cdots, \vec{P_{in_i}} \cdots) \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & e^{\lambda_i t} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ C_{i1} \\ \vdots \\ C_{in_i} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{S} \Big\{ C_{i1} e^{\lambda_i t} \vec{P_{i1}} + C_{i2} e^{\lambda_i t} \left[t \vec{P_{i1}} + \vec{P_{i2}} \right] + \cdots + C_{in_i} e^{\lambda_i t} \left[\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \vec{P_{i1}} + \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \vec{P_{i2}} + \cdots P_{in_i} \right] \Big\}$$

循环向量子数多形式

Re

若 $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \le \alpha$，$\forall i=1,2,\dots,s$

$\|e^{-\alpha t}\cdot \vec{x}(t)\| \le M$，$\forall t\in[t_0,+\infty)$

$\|\vec{x}(t)\| \le M e^{\alpha t}$

在什么条件下，$\|\vec{x}(t)\|\to 0$ $(t\to+\infty)$

① $\forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$

② $\|\vec{x}(t)\|$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上有界

$\forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\}\le 0$. "=" 特征值对应的 Jordan 块阶数为 1

作业：P116 2 6 不写

P138 1 (1) (3) 3.

定理：$\vec{x}(t)=e^{At}\cdot\vec{c}=Pe^{Jt}\cdot\vec{c}$

1° 上述方程组的一切解 $\vec{x}(t)\to 0\ (t\to+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(A)<0$.

2° —— 在 $[t_0,+\infty)$ 上有界 $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(A)\le 0$，且 Jordan 块阶数为1

3° —— 存在无界解于 $[t_0,+\infty)$ 上 $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(t)>0$ 或 Jordan 块阶数≥2

例. 设 $\varphi(t)$ 是线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}+A\vec{x}=\vec{f}(t)$ 的一组解，其中 $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & 1\\ & & \alpha\end{pmatrix}$，$\alpha\in\mathbb{R}$.
试确定参数 α 的条件，使得上述方程分别满足任意一解

1° $\|\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t)\|\to 0$，$(t\to+\infty)$

2° $\|\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t)\|\le M$，$\forall t\in[t_0,+\infty)$

3° $\|\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t)\|$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上无界

$e^{-At}=\left(e^{-\alpha t}\ \ e^{-Jt}\right)$

$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$

$A(t)=\begin{pmatrix}-1 & a(t)\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\lambda_{1,2}=-1<0$ 并不能得到：$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t)\|=0$.

$\begin{cases}\dot{x}=-x+a(t)y\\ \dot{y}=-y\end{cases}$ 取 $a(t)=e^{2t}$，则不一定有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t)\|=0$.

对于 $\overset{\text{变系数}}{\frac{d\vec{x}}{dt}}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)$

三. (CP) $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$，其中 $\vec{f}(t)$，$A(t)$ 均是 (α,β) 上的连续向量(矩阵)值函数

的解在 (α,β) 上总存在且唯一的.

(一) 设 $\vec{x}(t)$ 是 (CP) 的在 (α,β) 上的解.

(I) $\vec{x}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x}(s)+\vec{f}(s)]ds$

则 $\vec{x}(t)$ 满足上述(I)，或是 (I) 在 (α,β) 上的解.

若 $\vec{x}(t)$ 是 (I) 在 (α,β) 上的连续解，由 $A(t)$，$\vec{f}(t)$ 的连续性可知，

对 (I) 两边关于 t 求导是可行的，则 $\vec{x}(t)$ 满足 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)$，$\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$，

即 $\vec{x}(t)$ 是 (CP) 的解

$\vec{x}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x}(s)+\vec{f}(s)]ds$，$t\in(\alpha,\beta)$.

(二) 构造一列向量值函数列 $\{\vec{x_k}(t)\}$，$t\in(\alpha,\beta)$

$\begin{cases}\vec{x_0}(t)\equiv\vec{x_0}\\ \vec{x_1}(t)\triangleq\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_0}(s)+\vec{f}(s)]ds\\ \vec{x_2}(t)\triangleq\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_1}(s)+\vec{f}(s)]ds\\ \vdots\\ \vec{x}_{k+1}(t)\triangleq\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_k}(s)+\vec{f}(s)]ds\end{cases}$

(逐次逼近法)

皮卡序列

(三) 证明 $\{\vec{x}_k(t)\} \rightrightarrows x^*(t)$ 内闭一致收敛

即要证明 $\vec{x}_0 + \vec{x}_1(t) - \vec{x}_0 + \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) + \cdots + \vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t) + \cdots$

向量值函数项级数

内 (α,β) 上内闭一致收敛

设 $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$

$$\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_0(s) + \vec{f}(s)]\,ds \right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\|\|\vec{x}_0(s)\| + \|\vec{f}(s)\|)\,ds$$

$H \triangleq \max\limits_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$, $N \triangleq \max\limits_{t\in[a,b]} \|\vec{f}(t)\|$

$$\le \int_{t_0}^{t} (H\|\vec{x}_0\| + N)\,ds$$

$$\le (H\|\vec{x}_0\| + N)(b-a) \triangleq M$$

$$\|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|\vec{x}_1(s) - \vec{x}_2(s)\|\,ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t} HM\,ds \le HM|t-t_0|$$

$$\|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| HM |s-t_0|\,ds \le H^2 M \frac{\|t-t_0\|^2}{2}$$

$\vdots$

$$\|\vec{x}_k(t) - \vec{x}_{k-1}(t)\| \le H^{k-1} M \frac{|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\|\vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| H^{k-1} M \frac{\|s-t_0\|^{k-1}}{(k-1)!}\,ds \le H^k M \frac{|t-t_0|^k}{k!}$$

No.

Date.

$$\left\| \vec{x_0} + \sum_{k=1}^{m} \vec{x_k}(t) - \vec{x}_{k-1}(t) \right\| \le \|\vec{x_0}\| + \sum_{k=1}^{m} \| \vec{x_k}(t) - \vec{x}_{k-1}(t) \|.$$

$$\le \|\vec{x_0}\| + \sum_{k=1}^{m} H^k M \frac{|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\le \|\vec{x_0}\| + M \cdot e^{H(b-a)}$$

以上估计对任意 m 成立，因此，上述向量值函数级数在 $[a,b]$ 上一致收敛于极限函数 $\vec{x^*}(t)$，$t \in [a,b]$，且 $\vec{x^*}(t)$ 连续.

(四). $\vec{x}_{k+1}(t) = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} [A(s) \vec{x_k}(s) + \vec{f}(s)] ds.$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\vec{x^*}(t) \qquad\qquad \vec{x^*}(t)$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} [A(s) \vec{x_k}(s) + \vec{f}(s)] ds - \int_{t_0}^{t} [A(s) \vec{x^*}(s) + \vec{f}(s)] ds \right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \left(\|A(s)\| \| \vec{x_k}(s) - \vec{x^*}(s) \| \right) ds \le \int_{t_0}^{t} \left(\|A(s)\| \cdot \sup_{s \in [a,b]} \|\vec{x_k}(s) - \vec{x^*}(s)\| \right) ds$$

$$= H(b-a) \cdot \sup_{s \in [a,b]} \|\vec{x_k}(s) - \vec{x^*}(s)\| \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

以 $\vec{x^*}(t)$ 是该方程组(I)在 $[a,b]$ 上的连续解

由 $[a,b] \subset (\alpha, \beta)$ 的任意性，$\vec{x^*}(t)$ 是在 (α,β) 上 (I) 的连续解.

(五) 证明唯一性

引理: 设 $u(t)$ $v(t)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. $k \ge 0$

(Gronwall不等式) $u(t) \le k + \int_a^t v(s) u(s) ds$，$t \in [a,b]$

则 $u(t) \le k \exp\left(\int_a^t v(s) ds \right).$

Date.

设 $y^*(t)$ 也是积分方程 (I) 的连续解.

$$\|\vec{x}^*(t)-\vec{y}^*(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\,\|\vec{x}^*(s)-\vec{y}^*(s)\|\,ds.$$

则由 Gronwall 不等式, $\|x^*(t)-y^*(t)\| \le 0$,

$$\Rightarrow x^*(t)=y^*(t),\ (\text{唯一性})$$

3) 引理的证明:

1° $k>0$. $u(t) \le k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds$.

$$\frac{u(t)v(t)}{k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds} \le v(t).$$

$$\int_a^t \frac{u(s)v(s)}{k+\int_a^s v(\xi)u(\xi)\,d\xi} \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\int_a^t \frac{F'(s)\,ds}{F(s)} \le \int_a^t v(s)\,ds,\ 其中\ F(s) \triangleq k+\int_a^s v(\xi)u(\xi)\,d\xi$$

$$\ln|F(s)|\Big|_a^t \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\ln\left|k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds\right|-\ln k \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\ln u(t)-\ln k \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(t) \le k\cdot\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

2° $k=0$, $\{k_n\}\to 0$, $n\to\infty$. $k_n>0$.

$$u(t) \le k_n \exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

令 $n\to+\infty$ $k_n\to 0$, 则 证毕

No.

Date.

$1°$ $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $2°$ $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$1°$. $\lambda_1=1$. $\lambda_{2,3}=-1$.

$\lambda_1=1$ 的特征向量 $\vec{p_1}$

$\lambda_{2,3}=-1$ 的特征向量 $\vec{p_2}$ $\vec{p_3}$ 广义特征向量.

$$x(t)= c_1\cdot e^{\lambda_1 t}\vec{p_1}+c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{p_2}+c_3 e^{\lambda_3 t}\cdot[t\vec{p_2}+\vec{p_3}]$$

$2°$ $\lambda_{1,2,3}=2$.

$$(A-2I)\vec{p_1}=0.$$
$$(A-2I)\vec{p_2}=\vec{p_1}$$
$$(A-2I)\vec{p_3}=\vec{p_2}$$

若 $(A-\lambda I)\vec{p}=0$, 解得 $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ ..., 求 $\vec{p_3}$?

$(A-\lambda I)\vec{p}=\cancel{\vec{p_1}/\vec{p_2}}$?

$\alpha\vec{p_1}+\beta\vec{p_2}$ ✓. 凑 α,β

$$P=(\vec{p_1},\ \alpha\vec{p_1}+\beta\vec{p_2},\ \vec{p_3})$$

Date.

问题：对于一般的 $A(t)$，有无像数表示公式

四、~~一般~~线性方程组的一般理论

1° 设 $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ 任意的解，$\vec{x}(t) - \vec{y}(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t)$ 的解

2° 设 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t)$ 任意两解，则 $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 的解

$S \triangleq \{\vec{x}(t) \mid \vec{x}(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 的解$\}$

记 $\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ 表示 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$，$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ 的解

映 $\vec{x}_0 \longrightarrow \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$

$\mathbb{R}^n \qquad S$ （存在唯一性定理）

$\vec{x}(t, t_0, C_1\vec{x}_0 + C_2\vec{y}_0) \overset{?}{=} C_1\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0) + C_2\vec{x}(t, t_0, \vec{y}_0)$

表示~~满足~~初值 $(t_0, C_1\vec{x}_0 + C_2\vec{y}_0)$ ｜ 是方程组的解，$t = t_0$，$C_1\vec{x}_0 + C_2\vec{y}_0$

由唯一性定理，两者相等

3° $\mathbb{R}^n$ 与 S 同构

4° 基本解组 基本解方阵 及解的表示

设 $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t) \in S$，$\{\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)\}$ 为 n 个之解组

进一步，若存在不全为 0 的 $C_1, \dots, C_m$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\vec{\varphi}_i(t) = \vec{0}, \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

称 ~~这些解~~ $\{\vec{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^{m}$ 线性相关于 (α, β)

No.

Date.

若 $\sum_{i=1}^{m} c_i\vec{\varphi_i}(t) \equiv 0$, $\forall t\in(\alpha,\beta)$, 则 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$.

则 $\{\vec{\varphi_i}(t)\}_{i=1}^{m}$ 是线性无关(非平凡)于 (α,β) 上.

若解组 $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{m}$ 是线性无关的，则称其为基本解组

特别地，$m=n$ 时. $(\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t))$ 一基本解方阵

记为 $\Phi(t)$.

性质1°. 线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}(t)$ 的基本解方阵是存在的.

证明: 考虑如下的n个初值问题.

$$(P_i)\quad \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x} \\ \vec{x}(t_0)=\vec{e_i}=(0,0,\cdots,1,0,0,\cdots)^T \end{cases}$$ 其解为 $\vec{\varphi_i}(t)$

则若存在不全为0的 c_i, $\sum_{i=1}^{n} c_i\vec{\varphi_i}(t)=\vec{0}$ $(t\in(\alpha,\beta))$

特别地，令 $t=t_0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i\vec{e_i}=\vec{0}$

矛盾! $\Rightarrow$ $c_i=0$, $\forall i$

$(\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t))=\Phi(t)$ 是基本的.

性质2°. $\Phi(t)$ 是基本的 $\Longleftrightarrow$ $\det[\Phi(t)]\neq 0$, $\forall t\in(\alpha,\beta)$.

证明: "$\Leftarrow$" 若 $\Phi(t)$ 是非基本的.

存在不全为0的 c_i 使得 $\sum c_i\vec{\varphi_i}(t)=\vec{0}$. $\forall t\in(\alpha,\beta)$

以此得 $\det[\Phi(t)]=0$, 矛盾

"$\Rightarrow$" 若 $\exists\, t_0\in(\alpha,\beta)$, $\det[\Phi(t_0)]=0$

方程组 $\Phi(t_0)\vec{c}=\vec{0}$ 有非零解 $\vec{c}$

令 $\vec{y}(t)=\Phi(t)\cdot\vec{c}$ 是方程组 $\dot{\vec{x}}=A(t)\vec{x}$ 的解

且 $\vec{y}(t_0)=\Phi(t_0)\cdot\vec{c}=\vec{0}$

$\begin{cases}\vec{x}(t_0)=\vec{0} \\ \dot{\vec{x}}=A(t)\vec{x}\end{cases}$ 的解

由存在唯一性知 $\vec{x}(t)=\vec{y}(t)$ $\forall t\in(\alpha,\beta)$ 矛盾!

Date.

性质3：齐次线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 的通解可表示为 ~~$\vec{x}=\Phi(t)\vec{c}$~~ 为

$\vec{x}=\Phi(t)\cdot\vec{c}$，其中 $\Phi(t)$ 为基本阵

证：设 $\vec{x}(t)$ 是任意一解，$\Phi(t)$ 是基本方阵，

$\vec{x}(t_0)\in\mathbb{R}^n$，$\Phi(t_0)=(\vec{\varphi}_1(t_0),\cdots,\vec{\varphi}_n(t_0))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基

存在 c_i，使得 $\vec{x}(t_0)=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{\varphi}_i(t_0)$

$y(t)=\Phi(t)\cdot\vec{c}$ 是解，$\vec{y}(t_0)=\vec{x}_0$

由唯一性，$\vec{y}(t)=\vec{x}(t)$

性质4：$W(t)=\det[\Phi(t)]$，Wronsky 行列式

Liouville 公式 $W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}tr(A(s))\,ds\right)$

$$W(t)=\det\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

$$\dot{W}(t)=\sum_{i=1}^{n}\det\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ \dot{\varphi}_{i1}(t) & \dot{\varphi}_{i2}(t) & \cdots & \dot{\varphi}_{in}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

$\Phi(t)$ 是解矩阵

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \varphi_{21}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{i1}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{i1}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(t)\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi'_{i1}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_{j1}(t)$

$\vdots$

$\varphi'_{in}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_{jn}(t)$

$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\, W(t)$

性质5. 设$\phi(t)$是齐次线性方程组的基本解矩阵，则 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)$ 的解可表示为 $\vec{x}(t)=\underbrace{\phi(t)\phi^{-1}(t_0)}_{U(t,t_0)}\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}\underbrace{\phi(t)\phi^{-1}(s)}_{U(t,s)\text{ 状态转移矩阵}}\vec{f}(s)\,ds.$

设 $\vec{x}(t)=\phi(t)\vec{c}(t)$.

$\phi'(t)\vec{c}(t)+\phi(t)\vec{c}\,'(t)=A(t)\phi(t)\vec{c}(t)+\vec{f}(t)$

$A(t)\phi(t)\vec{c}(t)+\phi(t)\vec{c}\,'(t)$

$\Rightarrow \phi(t)\vec{c}\,'(t)=\vec{f}(t)$

$\vec{c}\,'(t)=\phi^{-1}(t)\vec{f}(t)$

$\therefore \vec{c}(t)=\vec{c}+\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$

$\vec{x}(t)=\phi(t)\cdot\vec{c}+\int_{t_0}^{t}\phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$

由 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 代入 $\vec{c}=\phi^{-1}(t_0)\vec{x}_0$

转移矩阵 $U(t,s)$ 的性质：

(A) $U(t,t)=I$

(B) $U(t,p)\,U(p,s)=U(t,s)$

(C) $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(t)\,U(t,s)$

No.

Date.

性质6. 设$\Phi(t)$, $\Psi(t)$ 均为齐次线性方程组的基本解方阵.

则存在非奇异常数矩阵 H, s.t. $\Phi(t)=\Psi(t)\cdot H$

即要证: $\Psi^{-1}(t)\Phi(t)\equiv H$. $\forall t\in(\alpha,\beta)$.

两边对 t 求导

$$-\Psi^{-1}(t)\underbrace{\frac{d\Psi(t)}{dt}}_{A(t)\Psi(t)}\Psi^{-1}(t)\Phi(t)+\Psi^{-1}(t)\underbrace{\frac{d\Phi(t)}{dt}}_{A(t)\Phi(t)}$$

$=0$.

$H=\Psi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)$ 非奇异

$$U(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s)=\Psi(t)H\cdot H^{-1}\Psi^{-1}(s)=\Psi(t)\Psi^{-1}(s)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}$$

$$\vec{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x_0}$$

$$e^{A(t-t_0)}=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

$$e^{At}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$$

通过首次积分求出$\Phi(t)$, $\vec{x}(t)=\Phi(t)\cdot\vec{c}$

No.

Date.

1° $e^{At} = \phi(t)\phi^{-1}(0)$ 计算方法

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{c}$

2° $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$\vec{u}_{1,2} = \vec{p}_1 \pm i\vec{p}_2$

$$\begin{pmatrix} \overline{x(t)} \\ \overline{y(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\alpha t}(p_1, p_2)\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{u}_2$$

3°. 记 $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为基本解方阵.

求 (1) $A(t)$ (2) $U(t,s)$ (3) $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(0) = (1,1) \end{cases}$, $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\phi(t) = A(t)\phi(t)$

$$\begin{pmatrix} e^t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos t - \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U(t,s) = \phi(t)\phi^{-1}(s)$

4° $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t)$ 二阶线性非齐次方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x - p(t)y + f(t) \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi(t) \cdot \vec{c} + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$$

其中 $\phi(t)$ 为对应齐次方程组一个基本矩阵 $\phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} \dot{x}_2(s) & -x_2(s) \\ -\dot{x}_1(s) & x_1(s) \end{pmatrix}}{W(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

$$x(t) = \underbrace{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}}{W(s)} f(s)\,ds}_{\text{非齐次方程的特解}}$$

→ 核函数

5° $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = t$, $s = \ln|t|$

设 $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = \frac{1}{t}$ 是方程的解

已知其中一个解, 求另一个无关解

刘维尔公式: $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}(t) \end{vmatrix} = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} -p(s)\,ds\right)$

$x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} -p(s)\,ds\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \frac{W(t_0)}{x_1^2(t)} \exp\left(\int_{t_0}^{t} -p(s)\,ds\right).$$

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = C + \int_{t_0}^{t} \frac{W(t_0)}{x_1^2(s)} \exp\left(\int_{t_0}^{s} -p(\xi)\,d\xi\right) ds.$$

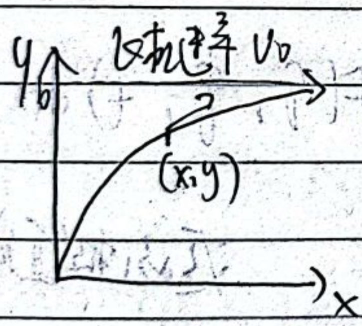
$$x_2(t) = C x_1(t) + x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W(t_0)}{x_1^2(s)} \exp\left(\int_{t_0}^{s} -p(\xi)\,d\xi\right) ds$$

$$\cancel{x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{s} -p(\xi)\,d\xi\right)}{x_1^2(s)} ds}$$

$(t-1)\ddot{x} - t\dot{x} + p(t)x = 0$. 存在基本解 t 和 $\varphi(t)$，求 $p(t)$ 及 $\varphi(t)$.

五：二阶线性方程的边值问题

例



导弹速率 v_1 坐标 (x,y).

建立方程描述导弹运动的所成曲线

$$\begin{cases} Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x) \\ b - y = \dfrac{dy}{dx}(x_0 + v_0 t - x) \end{cases}$$

$$(b-y)\frac{dx}{dy} = x_0 + v_0 t - x$$

对t求导 $$-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dy} + (b-y)\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right)}_{(b-y)\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}} = v_0 - \frac{dx}{dt}$$

No.

Date.

$(b-y)\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dt}=v_0$

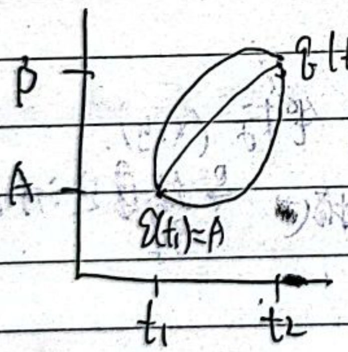
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=v_1^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]=v_1^2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

边值问题
$$\begin{cases}(b-y)\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}=v_0\\ x(0)=0 \qquad x(b)=v_0+v_0T\end{cases}$$

例 5.2



$$I(q)=\int_{t_1}^{t_2}F(q,\dot q,t)\,dt$$

$$\min_q I(q) \quad \text{泛函极值问题}$$

$I(q+\alpha\eta)$ ， 其中 $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$

$$0=\frac{d}{d\alpha}I(q+\alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}F(q+\alpha\eta,\dot q+\alpha\dot\eta,t)\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot q}\dot\eta\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot q}\dot\eta+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q}\eta\right)\right.$$

Date.

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\eta\Big]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\right]\eta\, dt = 0$$

边值问题 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial q}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)=0\\ q(t_1)=A,\quad q(t_2)=B\end{cases}$

边值问题.

$$\begin{cases}\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)\\ x(a)=A \quad x(b)=B.\end{cases}$$

$A=B=0$. 齐次边值条件

$f(t)=0$, $A=B=0$. 齐次方程 齐次边值问题

$$\begin{cases}x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+x^*(t)\\ x(a)=C_1x_1(a)+C_2x_2(a)+x^*(a)=A\\ x(b)=C_1x_1(b)+C_2x_2(b)+x^*(b)=B\end{cases}$$

1° $\det\begin{pmatrix}x_1(a) & x_2(a)\\ x_1(b) & x_2(b)\end{pmatrix}\neq 0$. 边值问题 解存在 唯一

2° $\det\left(\quad \cdots \quad\right)=0$. $\begin{cases}\text{无穷多解}\\ \text{无解}\end{cases}$

先转化为齐次初值问题

$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$

$$(CP)_1 \begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (CP)_2 \begin{cases} \text{------} \\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x_1(t)$ $\qquad\qquad$ $\hookrightarrow x_2(t)$

期中复习

No.

Date.

Chapter 0.

$(CP)\begin{cases}\frac{dN}{dt}=\lambda N\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$ 进行坐标变换，令 $T=t-t_0$，$F=N(t+t_0)$，则变为 $(CP)\begin{cases}\frac{dF(T)}{dt}=\lambda F(T)\\ F(0)=N_0\end{cases}$

Chapter 1.

分离变量法. 1. $\frac{dx}{dt}=f(\frac{x}{t})$. 令 $u=\frac{x}{t}$，$x=ut$，$\frac{du}{dt}=\frac{f(u)-u}{t}$

2. $\frac{dx}{dt}=f(at+bx+c)$ 令 $y=at+bx+c$

3. $\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$，令 $\begin{cases}a_1v+b_1u=a_1t+b_1x+c_1\\ a_2v+b_2u=a_2t+b_2x+c_2\end{cases}$

若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0$，化为2中情形. 若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$. 则令 $\frac{a_2}{a_1}=k$，$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{k(a_1t+b_1x)+c_2}\right)$，令 $y=a_1t+b_1x$

一阶线性方程 $\frac{dx}{dt}-p(t)x=Q(t)$，

1. 若 $Q(t)\equiv0$. 则 $x(t)=Ce^{\int p(t)dt}$.

2. 若 $Q(t)\neq0$. 则 $x(t)=e^{\int p(t)dt}\left(C+\int Q(t)e^{-\int p(t)dt}dt\right)$.

Bernoulli方程: $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)x^k$.

1. $k=0,1$. 利用常数变易公式

2. $k\neq0,1$. 令 $y=x^{1-k}$，$\frac{dy}{dx}=(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}$，故 $\frac{dy}{dx}+p(t)(1-k)y=Q(t)(1-k)$，化为一阶线性方程

Ricatti方程 $\frac{dx}{dt}+a(t)x+b(t)x^2=c(t)$

设 $\varphi(t)$ 是一个解. 则 $\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}+a(t)(x-\varphi)+b(t)(x^2-\varphi^2)=0$，令 $y=x-\varphi$.

则 $\frac{dy}{dt}+(a(t)+2b(t)\varphi(t))y+b(t)y^2=0$. 化为Bernoulli方程

全微分方程与积分因子 $M(t,x)dt-N(t,x)dx=0$ 有解 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$，可写为通积分 $u(t,x)=C$

积分因子: 找到 $\mu(t,x)$ 满足 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$，一般可令 $\mu(t,x)=\mu(t)$

未显式解出的一阶方程 1. $x=f(t,\dot{x})$ 型，引入 $p=\dot{x}$，则 $x=f(t,p)$，求导有 $p=\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}$，关于 p 的线性方程，若解为 $p=\varphi(t,c)$，则 $x=f(t,\varphi(t,c))$

2. $t=g(x,\dot{x})$ 型. 引入 $p=\dot{x}$，则 $t=g(x,p)$，对 x 求导有 $\frac{1}{p}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dx}$，若解得 $p=\psi(x,c)$. 则 $t=g(x,\psi$

高次方程的降阶: 1. 不显含未知函数，$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\dots,x^{(n)})=0$，引入 $y=x^{(k)}$

2. 不显含变量，$F(x,\dot{x},x^{(2)},\dots,x^{(n)})=0$. 引入 $y=\dot{x}$，则 $\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}$，$\dddot{x}=y\cdot(\frac{dy}{dx})^2+y\frac{d^2y}{dx^2}$

3. 齐次方程. 若 $F(t,kx,k\dot{x},\dots,kx^{(n)})=k^mF(t,x,x^{(1)},\dots,x^{(n)})$，$F(t,x,\dot{x},\dots,x^{(n)})=0$，引入 $y=\frac{\dot{x}}{x}$，$\dot{x}=yx$. 则

$x^mF(t,1,\frac{\dot{x}}{x},\frac{x^{(2)}}{x},\dots,\frac{x^{(n)}}{x})=0$.

4. 全微分方程和积分因子(见上)

(五) 常微分方程组与首次积分 例 单摆 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$. 令 $y=\frac{d\varphi}{dt}$, 则 $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi\\ \frac{d\varphi}{dt}=y\end{cases}$, 相除 $\frac{d\varphi}{dy}=\frac{y}{-\frac{g}{l}\sin\varphi}$

Chapter 2.

$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$ 的通解为 (λ_1,λ_2为特征根): $x=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1\ne\lambda_2, 实\\ (C_1t+C_2)e^{\lambda t}, & \lambda_1=\lambda_2=\lambda, 实\\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t), & \lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta, 虚\end{cases}$

Euler方程 $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+ta_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0$，令 $s=\ln|t|$，得 $\frac{d^2x}{ds^2}+(a_1-1)\frac{dx}{ds}+a_2x=0$.

n阶常系数线性方程. $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=f(t)$

(Thm.) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$ 为s个实特征根，$n_1,n_2,\dots,n_s$为重数，$\alpha_1\pm i\beta_1,\dots,\alpha_p\pm i\beta_p$为虚特征根，$m_1,\dots,m_p$为重数

则实数解为 $x(t)=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_i t}\cdot P_i(t)+\sum_{i=1}^{p}e^{\alpha_i t}[M_i(t)\cos\beta_i t+N_i(t)\sin\beta_i t]$，其中$P_i(t)$为任意$n_i-1$次多项式，$M_i(t),N_i(t)$为任意$m_i-1$次多项式

运算子法求特解：性质: 1. $\frac{1}{P(D)}(C_1f(t)+C_2g(t))=C_1\frac{1}{P(D)}f(t)+C_2\frac{1}{P(D)}g(t)$; 2. $P(D)=P_1(D)P_2(D)\Rightarrow\frac{1}{P(D)}=\frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_2(D)}$

3. $\frac{1}{P(D)}\cos\beta t=\mathrm{Re}\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\}$, $\frac{1}{P(D)}\sin\beta t=\mathrm{Im}\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\}$

计算公式: 1.若$P(\lambda)\ne0$, $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$; 2.若$P(-\beta^2)\ne0$, $\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t$, $\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t$

3°. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t)=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

Chapter 3.

$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t))=-A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t)\cdot A^{-1}(t)$

☆ 向量范数: 正定性, 齐次性, 三角性

$\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\le\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2$

向量诱导的范数 $\|A\|=\sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\vec{x}\ne0}\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\Rightarrow\|A\|=\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|A\vec{x}\|$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$, $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$, $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$

性质 1. $\|A\vec{x}\|\le\|A\|\|\vec{x}\|$ 2. $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$. 3. $\|A\|_2=\|A^T\|_2$ 4. $\|\int_\alpha^\beta A(s)ds\|\le\int_\alpha^\beta\|A(s)\|ds$

e^{At}的计算 $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$

性质 1. $\frac{d}{dt}e^{At}=A\cdot e^{At}=e^{At}\cdot A$ 2. $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

计算性质 1. $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $e^{At}=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t})$. 2. $A=\begin{pmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&\ddots\\&&&A_n\end{pmatrix}$, $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{A_1t}&&\\&e^{A_2t}&\\&&\ddots\\&&&e^{A_nt}\end{pmatrix}$

3. $A=PJP^{-1}$, $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$ 4. $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$, $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&\cdots&\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\&e^{\lambda t}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&te^{\lambda t}\\&&&e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

5. 方程 $\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}$ 的解为 $\vec{x}=Pe^{Jt}\vec{c}$，其中 $P^{-1}AP=J$

一般地，若$J=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_s\end{pmatrix}$ J_i为$n_i\times n_i$块，$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}_{n_i}$

则 $\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{s}\{C_{i1}e^{\lambda_i t}\vec{P}_{i1}+C_{i2}e^{\lambda_i t}[t\vec{P}_{i1}+\vec{P}_{i2}]+\dots+C_{in_i}e^{\lambda_i t}\underbrace{[\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{P}_{i1}+\frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\vec{P}_{i2}+\dots+\vec{P}_{in_i}]}_{\text{循环入向量多项式}}\}$

P.S. $e^{At}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$

No.

方程 $\begin{cases}\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 的解为 $\vec{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds$

逐次逼近法：$(CP)\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 在(α,β)上有唯一解.

一. 证明 $(CP)\Leftrightarrow \vec{x}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x}(s)+\vec{f}(s)]ds$　二. 构造函数列 $\vec{x_0}(t)=\vec{x_0}$, $\vec{x_1}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_0}(s)+\vec{f}(s)]ds$, …, $\vec{x_{k+1}}(s)=\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_k}(s)+\vec{f}(s)]ds$　三. 证明 $\{\vec{x_k}(t)\}\rightrightarrows\vec{x^*}(t)$ 内闭一致收敛. 且 $\vec{x^*}(t)$ 连续　四. 证明 $\vec{x^*}(t)$ 为方程的解

五. 证明唯一性. (Gronwall 不等式)

Gronwall 不等式：设 $u(t),v(t)$ 非负连续, $k>0$. 若 $u(t)\le k+\int_a^t v(s)u(s)ds$, $\forall t\in[a,b]$. 则 $u(t)\le k\exp(\int_a^t v(s)ds)$

线性方程组的一般理论

基本解组, 基本解矩阵 $\phi(t)=(\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t))$, $\phi(t)$基本 $\Leftrightarrow$ Wronski行列式 $\det[\phi(t)]\ne0$, $\forall t\in(\alpha,\beta)$

齐次线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}$ 的通解为 $\vec{x}=\phi(t)\cdot\vec{c}$

Liouville 公式：设 $W(t)=\det[\phi(t)]$, 则 $W(t)=W(t_0)\cdot\exp(\int_{t_0}^{t}tr(A(s))ds)$

常数变易公式：$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 的解为 $\vec{x}(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\cdot\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}\phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

$=U(t,t_0)\cdot\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}U(t,s)\cdot\vec{f}(s)ds$, 其中$U(t,s)$为状态转移矩阵

基本解矩阵的不唯一性：设 $\phi(t)$, $\psi(t)$ 为基本解矩阵. 则 $\exists$ 非奇异常数阵H, s.t $\phi(t)=\psi(t)\cdot H$

状态转移矩阵性质：1. $U(t,t)=I$　2. $U(t,p)\cdot U(p,s)=U(t,s)$　3. $\frac{d}{dt}U(t,s)=A(t)\cdot U(t,s)$, 其中 $U(t,s)=\phi(t)\phi^{-1}(s)$

二阶线性方程：$\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)$. 令 $\dot{x}=y$. 则 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A(t)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\vec{f}(t)$, 其中 $A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-q(t)&-p(t)\end{pmatrix}$, $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}0\\f(t)\end{pmatrix}$

已知一解求另一解：由Liouville公式　$x_2(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp(\int_{t_0}^{s}-p(\xi)d\xi)}{x_1^2(s)}ds$　($x_1(t)$, $x_2(t)$为齐次方程的解, 且$x_1(t)\ne0$)

(若可对角化)

1. 求 e^{At}, 和方程组实值解：先求出 $\vec{p}$, 得到 $\vec{p_1}e^{\lambda_1 t},\vec{p_2}e^{\lambda_2 t},\cdots,\vec{p_n}e^{\lambda_n t}$ 为基本解, 得 $\phi(t)$, 则 $e^{At}=\phi(t)\phi^{-1}(0)$ 得实值e^{At}

这是一个基本解矩阵. 设e^{At}的n列为 $\vec{\xi_1},\vec{\xi_2},\cdots,\vec{\xi_n}$ 则通解为 $\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{\xi_i}$

边值问题：二阶齐次线性方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 的两个无关解为$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$. 则方程有齐次边值条件 $y(a)=y(b)=0$

有唯一解 $\Leftrightarrow\det\begin{pmatrix}\varphi_1(a)&\varphi_2(a)\\ \varphi_1(b)&\varphi_2(b)\end{pmatrix}\ne0$, 否则有无数解

设 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$, $y(a)=y(b)=0$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$为齐次方程的基本解组且 $\phi(a)=I$, 即 $\begin{pmatrix}\varphi_1(a)&\varphi_2(a)\\ \varphi_1'(a)&\varphi_2'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

则 当 $\varphi_2(b)\ne0$ 时, 方程解为 $y=\int_a^b G(x,s)f(s)ds$,

其中 $G(x,s)=\begin{cases}k(x,s)-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b,s), & a\le s\le x\\ -\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b,s), & x\le s\le b\end{cases}$, 其中 $k(t,s)=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(s)&\varphi_2(s)\\ \varphi_1(t)&\varphi_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}$

$W(s)=\begin{vmatrix}\varphi_1(s)&\varphi_2(s)\\ \varphi_1'(s)&\varphi_2'(s)\end{vmatrix}$

Date.

补充：二阶线性方程 (变系数 / 非齐次) $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)$ 的基本方阵 $\Phi=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}$

方程解为：$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1(t) & x_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}f(s)\,ds$

二阶常系数线性非齐次方程 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=f(t)$ 的解为

$$x(t)=\begin{cases} C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\int_0^t\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds, & \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ 实} \\ (C_1+C_2t)e^{\lambda t}+\int_0^t(t-s)e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds, & \lambda_1=\lambda_2=\lambda \text{ 实} \\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)+\int_0^t\frac{e^{\alpha(t-s)}}{\beta}\sin\beta(t-s)f(s)\,ds \end{cases}$$

重要：
1. $\frac{dx}{dt}-P(t)\cdot x=Q(t)$
2. Bernoulli方程
3. Ricatti方程
4. 高次方程的降阶
5. Euler方程
6. $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t)$
7. $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$
8. $\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}+\vec{f}(t)$
9. $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$
10. Gronwall不等式
11. Liouville公式
12. $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=f(t)$
13. 由上述方程的一个解 $x_1(t)$，求 $x_2(t)$
14. 边值问题的解

二阶线性方程的边值问题

$$\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=f(t) \\ x(a)=A \quad x(b)=B \end{cases}$$

$A=B=0$ 齐次边值问题条件　　$f(t)$ 齐次边值问题.

$x(t)=C_1x_1(a)+C_2x_2(a)$，$x_1(t), x_2(t)$ 是齐次方程的一对线性解.

(P1) $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=0. \\ x(a)=1 \quad \dot{x}(a)=0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $x_1(t)$　　(P2) $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=0 \\ x(a)=0. \quad \dot{x}(a)=1 \end{cases}$ $\Downarrow$ $x_2(t)$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 线性无关

若满足齐次边值条件，$x(a)=0$，$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t) \Rightarrow C_1=0$.　$x(t)=C_2x_2(t)$

所有齐次边值，问题有非零解 C_2 的齐次线性方程

例：$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0. \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$　λ 为参数

试确定参数 λ 的值，使得上述齐次边值问题有非零解.

$1°\ \lambda<0$，$y(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$　$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=0 \\ y(l)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=0$　$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}l} & e^{\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$

$2°\ \lambda=0$　$y=(C_1x+C_2)$.　$\begin{cases} y(0)=C_2=0 \\ y(l)=C_1l+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=0$.

$3°\ \lambda>0$　$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot x$　$\begin{cases} y(0)=C_1 \\ y(l)=\cancel{C_1\cos\sqrt{\lambda}l}+C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot l=0 \end{cases}$

若 $\sqrt{\lambda}l=k\pi$ 时，有非零解，$y=C_2\sin\sqrt{\lambda_k}\cdot x$，其中 $\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$

使得该边值问题的 λ 称为特征值，对应非零 y 为特征函数

例 $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t) \\ x(a)=0, \quad x(b)=0. \end{cases}$

$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds$，$K(t,s)=\frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(s) \\ x_2(t) & x_2(s) \end{vmatrix}}{W(s)}$

$0=x(a) \Rightarrow C_1=0$

$0=x(b)=C_2x_2(b)+\int_a^b K(b,s)f(s)\,ds$，　$C_2=-\frac{1}{x_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)\,ds$

$$X(t) = -\frac{X_2(t)}{X_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)ds + \int_a^{t} K(t,s)\, f(s)ds$$

$$= \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds$$

格林函数 $G(t,s) = \begin{cases} K(t,s) - \frac{X_2(t)}{X_2(b)} K(b,s) & , s\in[a,t] \\ -\frac{X_1(t)}{X_2(b)} K(b,s) & , s\in[t,b] \end{cases}$

性质 1° $G(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数

2° $G(a,s) = G(b,s) = 0$

3° $\frac{\partial G(s+0,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-0,s)}{\partial t} = 1$

4° $\frac{d^2G(t,s)}{dt^2} + p(t)\frac{dG(t,s)}{dt} + q(t)\, G(t,s) = \delta(t-s) = \begin{cases} 0 & , t\neq s \\ \infty & , t=s \end{cases}$

P169. 7. $\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-a(t)\cdot x(t)}_{f(t)}$ 看成非齐次项

$$x = C_1 + C_2 t + \int_0^t (t-s)\,[-a(s)x(s)]\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t (t-s)\,[-a(s)X(s)]\,ds$$

证 $X(t)$ 在 $[0,T]$ 上大于 0，若 $x(t)>0$ 成立，则需证明

若不然，则设 $x(t)$ 在 $t=T'$ 时首次为 0，$x(0)=1$，$x(T')=0$。

例：$\ddot{x} + e^{2t}x = 0$ 的解在 $[0,\pi]$ 上有零点

$$\ddot{x} + x = (1-e^{2t})x$$

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \int_0^t \sin(t-s)\,(1-e^{2s})\,x(s)\,ds$$

证明 $x(0)\cdot x(\pi) \le 0$

T2: 设 $A(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵值函数，且满足 $\frac{dA(t)}{dt} = B(t)\cdot A(t)$ ... (*)，$t\in\mathbb{R}$

其中 $B(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵值函数，连续可导

(1) 用逐次逼近法证明：(*) 的初值问题的解存在唯一性

(2) 确定 $\{A(t) \mid A(t)$ 满足 (*)$\}$ 的维数

No.

Date.

问：若 $\begin{cases} A^T(t)=A^{-1}(t), & \forall t\in R \\ A(0)=I \end{cases}$ 成立的充要条件是什么？

$$\frac{dA^T(t)}{dt}=A^T(t)\,B^T(t),\quad \frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t)\,A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\,B(t)$$

$$=A^{-1}(t)\,B^T(t) \qquad\qquad =-A^{-1}(t)B(t)$$

$$\Rightarrow\quad B(t)=-B^T(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d[A^{-1}(t)]^T}{dt}=-B^T(t)\,[A^{-1}(t)]^T \\ [A^{-1}(0)]^T=I \end{cases}$$

存在同解 $\Rightarrow B(t)+B^T(t)=0.$

$$\begin{cases} \dfrac{dA(t)}{dt}=B(t)A(t) \\ A(0)=I, \end{cases}$$

例. 若方程组 $\begin{cases} \dot{x}=2y^3+\xi xy^4 \\ \dot{y}=-x+x^2y \end{cases}$ 若 $\varphi(x,y)=x^2+y^4$ 是它的首次积分，求 ξ 的值。

$$2x\dot{x}+4\dot{y}y^3=2x(2y^3+\xi xy^4)+4y^3(-x+x^2y)=0$$

$$=4xy^3+2\xi x^2y^4-4xy^3+4x^2y^4 \Rightarrow 2\xi+4=0,\Rightarrow \xi=-2$$

思考：

[当 $\xi<-2$ 时，有 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，一切解 $\to$ 0]，$\frac{d}{dt}\varphi(x,y)=(2\xi+4)x^2y^4\le 0$

若 $\varphi(x,y)\to A$，是否有 $\frac{d}{dt}x^2y^4\to 0$？

例：$\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0 \\ x(0)=x(1)=0. \end{cases}$ 其中 $\begin{matrix} p(t+1)=p(t) \\ q(t+1)=q(t) \end{matrix}$，$t\in R$

证 $x(n)=0,\ n\in Z.$

若 $x(t)$ 是解，则 $x(t+1)$ 是另一个方程的解

$\cancel{C_1x(t)}+C_1x(t)+C_2x(t+1)$ 也是解

构造 C_1,C_2 使 $C_1x(t)+C_2x(t+1)=0.$

Date.

~~$x(t)$ 与 $x(t+1)$~~ ~~$=0$.~~

$c_1 x(0) + c_2 x(1) = 0$ ✓.

~~$c_1 x$~~ $x_1'(t) - x'(0)\, x(t+1)$ 也是方程的解

$u(t) =$

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ \dot{u}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow u(t) \equiv 0$$

若 $x'(0)=0$ ✓

若 $x'(0)\neq 0$, $x(t+1) = \dfrac{x'(1)}{x'(0)}\, x(t)$

P146. 7 $\dfrac{d}{dt}\|\vec{\varphi}(t)\|^2 = \dfrac{d}{dt}\langle \vec{\varphi}(t), \vec{\varphi}(t)\rangle$

$= \langle \dot{\vec{\varphi}}(t), \vec{\varphi}(t)\rangle + \langle \vec{\varphi}(t), \dot{\vec{\varphi}}(t)\rangle$

$= \cancel{A(t)\vec{\varphi}(t)}$

$= \vec{\varphi}^T(t)\,[A^T(t) + A(t)]\,\vec{\varphi}(t) \leq \lambda_{max}\|\vec{\varphi}(t)\|^2$

$t\in[a,b] \subset (\alpha,\beta)$

$\|\vec{\varphi}(t)\| \leq \|\vec{\varphi}(t_0)\|^2 e^{\lambda_{max}(t-t_0)}$

No.

Date.

Chapter 4. 常微分方程的基本理论.

一、初值问题的唯一性.

$$(CP)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

$f(t,x)$ 在闭矩形区域 $\overline{R}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}$ 上二元连续，并且关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在 $L>0$ (Lipschitz 常数)

使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$，$\forall (t,x),(t,y)\in\overline{R}$，

则 (CP) 的解在 ~~[t_0-h] [t_0+h]~~ $[t_0-h, t_0+h]$ 上存在且唯一，其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$.

$$M=\max_{(t,x)\in\overline{R}}|f(t,x)|$$

证明：(一) (I) $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds$，$t_0-h\le t\le t_0+h$.

若 $x(t)$ 是 (CP) 的解，易证 $x(t)$ 是 (I) 的解

若 $x(t)$ 是 (I) 在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上连续解，易证 $x(t)$ 是 (CP) 上的解

(二) 构造函数序列 $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$，$t\in[t_0-h,t_0+h]$

$$\begin{cases}x_0(t)=x_0\\ x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_0(s))ds\\ \vdots\\ x_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_k(s))ds\end{cases}$$

首先要说明每个 $x_k(t)$ 是 $[t_0-h,t_0+h]$ 上的连续函数 且 $\forall k$，$(t,x_k(t))\in\overline{R}$

$k=0$，$(t,x_0)\in\overline{R}$，$t\in[t_0-h,t_0+h]$

$$|x_1(t)-x_0|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,x_0(s))|ds\le M|t-t_0|\le b.$$

$k=1$，$(t,x_1(t))\in\overline{R}$

假设 k 成立.

$$|x_{k+1}(t)-x_0|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,x_k(s))|ds\le M|t-t_0|\le b$$

(三) $\{x_k(t)\}\rightrightarrows x^*(t)$ (一致收敛)

$$|x_1(t)-x_0(t)|\le M|t-t_0|$$

$$|x_2(t)-x_1(t)|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,x_1(s))-f(s,x_0(s))|ds\le\int_{t_0}^{t}L|x_1(s)-x_0|ds\le\int_{t_0}^{t}LM|s-t_0|ds$$

$$\le LM\frac{|t-t_0|^2}{2}$$

假设 $|x_k(t)-x_{k+1}(t)| \le L^{k-1} M \cdot \frac{|t-t_0|^k}{k!}$

则 $|x_{k+1}(t)-x_{k+2}(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s,x_k(s)) - f(s,x_{k-1}(s))| ds$

$\le \int_{t_0}^{t} L^k M \frac{|s-t_0|^k}{k!} ds \le L^{k+1} M \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} L^k M \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}$ 收敛

$x_0 + x_1(t) - x_0 + x_2(t) - x_1(t) + \cdots + x_{k+1}(t) - x_k(t) + \cdots$

在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上一致收敛

(四) 证明 $x^*(t)$ 是 (I) 的解

$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s)) ds$

$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s)) ds$

(前提: 说明 $x^*(t)$ 存在 R 中).

$\left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s)) ds \right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x^*(s))| ds$

$\le \int_{t_0}^{t} L |x_k(s) - x^*(s)| ds$ ~~$\le L\int_{t_0}^{t} \varepsilon\, ds \le L\varepsilon|t-t_0|\varepsilon$~~

$\le L \underbrace{|t-t_0|}_{有界} \underbrace{\sup_{s\in[t_0-h, t_0+h]} |x_k(s) - x^*(s)|}_{\to 0\ (k\to\infty)} \to 0 \quad (k\to\infty)$

于是存在性得证.

(五) 唯一性的证明　设 $x(t)$, $y(t)$ 均为 (CP) 的解

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$

$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$

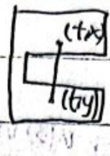
$|x(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \le \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)| ds$

利用Gronwall不等式，$0 \le |x(t)-y(t)| \le 0$，唯一性得证.

注1° $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $\bar{R}$ 上连续.

$$|f(t,x)-f(t,y)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \theta x+(1-\theta)y)(x-y)\right| \le L|x-y|$$

注2° $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D (闭有界，凸) 连续



注3. 若 $\lim_{x\to x_0} \frac{\partial f}{\partial x} = \infty$. 则在任何包含 (t,x_0) 的区域上 Lipschitz 条件均不成立

$(t,x), (t,x+h) \in U \ni (t,x_0)$

$$|f(t,x)-f(t,x+h)| \le Lh$$

$$\left|\frac{f(t,x)-f(t,x+h)}{h}\right| \le L$$

习题1:

(1) 用逐次逼近法证明 Gronwall 不等式

$$u(t) \le k + \int_a^t u(s)v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(t) \le k\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

定义 $\{u_p(t)\}$

$$\begin{cases} u_0(t) = k \\ u_1(t) = k + \int_a^t u_0(s)v(s)\,ds \\ \vdots \\ u_{p+1}(t) = k + \int_a^t u_p(s)v(s)\,ds \end{cases}$$

$$u_1(t) = k + \int_a^t v(s)\,ds$$

$$u_2(t) = k + \int_a^t \left(k + \int_a^s v(\xi)\,d\xi\right) v(s)\,ds = k + k\int_a^t v(s)\,ds + k\int_a^t\int_a^s v(\xi)\,d\xi\, v(s)\,ds = k + k\int_a^t v(s)\,ds + k\cdot\frac{1}{2}\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)^2$$

则 $u_p(t) = k + k\int_0^t v(s)ds + \cdots + k\frac{1}{p!}\left(\int_0^t v(s)ds\right)^p$

$\lim_{k\to\infty} u_p(t) \le k\cdot \exp\int_0^t v(s)ds$

$u(t) - u_k(t)$

$u(t) - u_0 \le k\int_0^t u(s)v(s)\,ds \le \cancel{kM}\int_0^t v(s)\,ds \quad (u(t)\le M)$

$u(t) - u_1(t) \le k\cdot\int_0^t (u(s) - u_0(s))v(s)ds \quad \cancel{\le k\int_0^t k\left(\int_0^s u(\xi)v(\xi)d\xi\right)v(s)ds}$

$\le M\int_0^t\left(\int_a^s v(\xi)d\xi\right)v(s)ds \le M\cdot\frac{1}{2!}\left(\int_a^t v(s)ds\right)^2$

$\vdots$

$u(t) - u_p(t) \le M\cdot\frac{1}{(p+1)!}\left(\int_a^t v(s)ds\right)^{p+1} \to 0 \ (k\to+\infty)$

(2) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$

1° $A(t)\equiv A$, $\forall\, Re\{\lambda(A)\}<0 \iff \vec{x}(t)\to\vec{0} \ (t\to+\infty)$

2° $A(t)$对称 $\forall\, Re\{\lambda(A(t))\}<\alpha<0,\ \forall t>t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \vec{x}(t)\to\vec{0}\ (t\to+\infty)$

$\frac{d}{dt}\|\vec{x}(t)\|^2 = \langle\dot{\vec{x}}(t),\vec{x}(t)\rangle + \langle\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t)\rangle$

$= \vec{x}^T(t)\cdot[A^T(t)+A(t)]\cdot\vec{x}(t) = 2\vec{x}^T(t)A(t)\vec{x}(t)$

$\le 2\alpha\|\vec{x}(t)\|^2$

$\|\vec{x}(t)\|^2 \le \|\vec{x}_0\|^2\cdot e^{2\alpha(t-t_0)}$

3° $A(t) = A + B(t)$ $\quad \forall\, Re\{\lambda(A)\}<0$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B(t)\vec{x}(t)$

$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)ds$

$\|e^{A(t-s)}\| \le M e^{\alpha(t-s)} \quad (M>0,\ \alpha<0)$

$e^{-\alpha t}\|\vec{x}(t)\| \le M\|\vec{x}_0\|e^{-\alpha t_0} + \int_{t_0}^t M\|B(s)\|e^{-\alpha s}\|\vec{x}(s)\|ds$

利用Gronwall不等式 $e^{-\alpha t}\|\vec{x}(t)\| \le \hat{k}\exp\left(\int_{t_0}^t M\|B(s)\|ds\right)$

$\|\vec{x}(t)\| \le \cancel{e^{\alpha t}k\exp(\int_{t_0}^t}\ \hat{k}e^{\alpha t}e^{\int_{t_0}^t M\|B(s)\|ds} \to 0 \ (t\to\infty)$

(A) $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds < +\infty$

(B) $\lim_{t\to+\infty}\|B(t)\| = 0$?

一、解的存在唯一性

$(Cr)\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ $\quad R=\{(t,\vec{x})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0|\le a,\ \|\vec{x}-\vec{x_0}\|<b\}$

$\vec{f}$ 连续于 $\bar{R}$，并关于 $\vec{x}$ 满足 Lipschitz 条件：

存在 $L>0$，$\|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{y})\|\le L\|\vec{x}-\vec{y}\|$，$\forall(t,\vec{x}),(t,\vec{y})\in\bar{R}$

则 (CP) 的解在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在且唯一，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$ $\quad M=\max_{(t,\vec{x})\in\bar{R}}\|\vec{f}(t,\vec{x})\|$

适用区域，D 为区域，$f(t,x)$ 在 D 上连续，并且 $f(t,x)$ 关于 x 于 D 上满足局部 Lipschitz 条件

则 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 的解存在且唯一。

$(t_0,x_0)\in D$

特别地，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 上连续

例 在平面的区域 $x\neq1, y>0$ 上，过其中每一点的微分方程 $(x-1)\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}-x$ 的解一定存在且唯一

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}-x}{x-1}$，$\frac{\sqrt{y}-x}{x-1}$ 连续 $\Rightarrow x\neq1$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续 $\Rightarrow y>0$.

例1. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=1+x^2\\ x(0)=0\end{cases}$ $\quad \cancel{x=\tan t}$

$x(t)=\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t|\le a,\ |x|\le b\}$

解 $x=\varphi(t)$ 在 $[-h,h]$ 上存在且唯一

$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$ $\quad M=\max_{(t,x)\in\bar{R}_{(a,b)}}|1+x^2|=1+b^2$

$\frac{b}{1+b^2}\le\frac{1}{2}$

得到 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

二. 解的延展(拓)

定义1 设 $x(t)$ 是初值问题在 (γ,δ) 上的解，$y(t)$ 是 (α,β) 上的解，$\alpha<\gamma<\delta<\beta$ 且 $x(t)\equiv y(t)$，$\forall t\in(\gamma,\delta)$。

则称 $y(t)$ 是 $x(t)$ 在 (α,β) 上的延展解

定义2 若 $x(t)$ 是 (α,β) 上的解，并且不能再延展，则称 $x(t)$ 是方程的饱和解，(α,β) 为最大存在区间

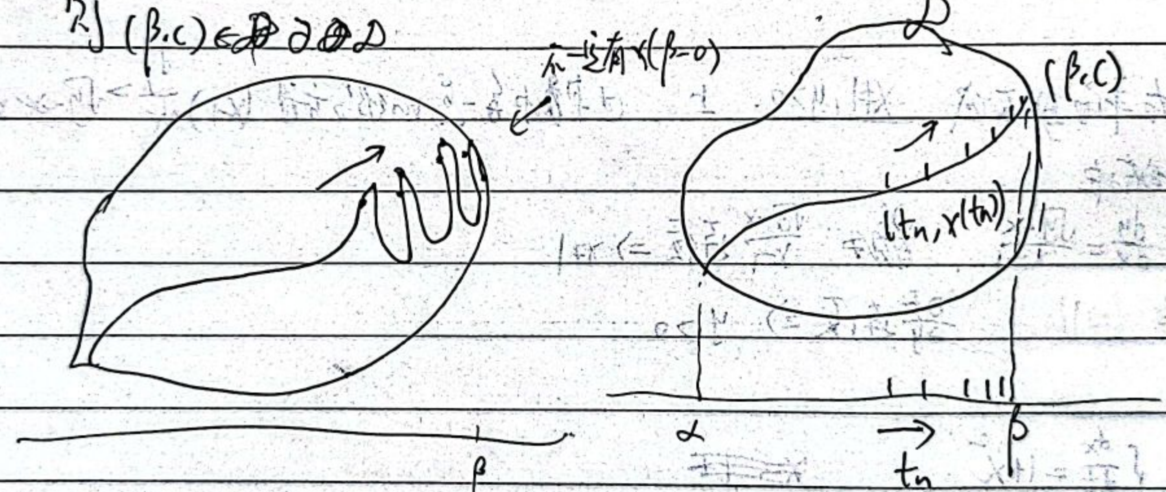
饱和解的若干性质.

性质1° 设 D 是有界区域，$f(t,x)$ 于 D 上连续，且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件

再设 $x(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的饱和解，(α,β) 是最大存在区间

$\exists\{t_n\}$，$t_n\to\beta-0\ (n\to\infty)$　　$x(t_n)\to c\ (n\to\infty)$

则 $(\beta,c)\in\partial D$



[证明]

证：若不然 $(\beta,c)\in D$

$(t_n,x(t_n))\in D$

$(CP)_n\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_n)=x_n^*\end{cases}$ 的解在 $[t_n-h_n,t_n+h_n]$ 上存在且唯一

令 $n\to\infty$，$t_n+h_n\to\beta+h_n>\beta$

← 会有误证明 因为 h_n 可能 $\to 0$

证:

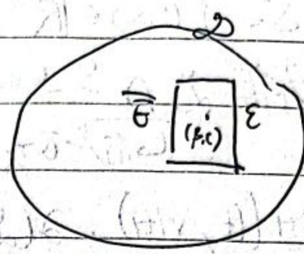
No.

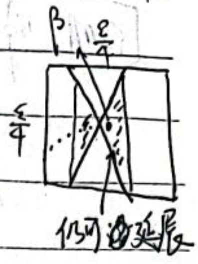
Date.

$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$U_\delta(t_n, x(t_n))$ 为以 (β,c) 为中心的闭区域 ~~的~~ 矩形 $\overline{E}$ 中，

取 $a=b=\frac{\varepsilon}{8}$，$M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{E}} |f(t,x)|$　　以 $\frac{\varepsilon}{4}$ 为边长

注：不保证 ~~$x(t_n)\to c$~~. $x(\beta-0)$ 有极限





性质2° 若性质1°中的(1),(2)成立，且 $\overline{\mathcal{D}_1}\subset\mathcal{D}$ 是内闭子区域，则 $\exists\delta>0$，

当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $(t,x(t))\notin\overline{\mathcal{D}_1}$

[证明] 若不然，取 $\delta=\frac{1}{n}$，$\exists t_n\in(\beta-\frac{1}{n},\beta)$，成立 $(t_n,x(t_n))\in\overline{\mathcal{D}_1}$

$t_{n_k}\to\beta-0$，$(k\to+\infty)$　　$x(t_{n_k})\to c$　$(k\to+\infty)$　~~(子列收敛 Bolzano-Weierstrass)~~（子列收敛 Bolzano-Weierstrass）

由性质1°，$(\beta,c)\in\partial\mathcal{D}$，$(\beta,c)\in\overline{\mathcal{D}_1}$

$\partial\mathcal{D}\cap\overline{\mathcal{D}_1}=\phi$　矛盾.

性质3°．性质1°中(1)(2)成立，记 $\rho(t)\triangleq dist((t,x(t)),\partial\mathcal{D})$

$dist(p,A)=\inf\limits_{q\in A}\|p-q\|$

则 $\lim\limits_{t\to\beta-0}\rho(t)=0$　　$\lim\limits_{t\to\alpha+0}\rho(t)=0$

[证明] $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $\rho(t)<\varepsilon$（要证）

$\overline{\mathcal{D}_\varepsilon}\triangleq\{(t,x)\in\mathcal{D}\mid dist((t,x),\partial\mathcal{D})\geq\varepsilon\}$ 内闭区域

现根据性质2°，$\exists\delta$，成立 $(t,x(t))\notin\overline{\mathcal{D}_\varepsilon}$

性质4° 若 $\mathcal{D}$ 是有界区域，$f(t,x)$ 于 $\mathcal{D}$ 上连续且关于x满足局部Lipschitz条件，

$x(t)$ 是 (α,β) 上的饱和解，则以下情形必居其一：

1°. $\beta=+\infty$．　2° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 无界　3° $\beta<+\infty$．$x(t)$ 有界　$dist((t,x(t)),\partial\mathcal{D})\to0\ (t\to\beta-0)$

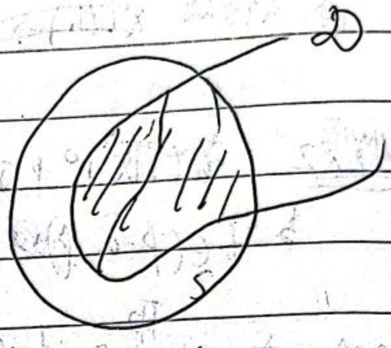
[证明] 此解有界，$|x(t)|<M$.

$S=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t^2+x^2<H\}$ $H>>M$.

考虑 $\mathscr{D}\cap S$ 上的解的最大存在区间，$x(t)$ 是 (α,β) 上的饱和解

(有界区域)

$\mathrm{dist}\left((t,x(t)),\partial(\mathscr{D}\cap S)\right)\to 0 \ (t\to\beta-0)$



[例]. $f(t,x)$ 是整平面连续有界函数，$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ 在整平面上连续.

证明：$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的解的最大存在区间均为 $\mathbb{R}$

[证明] 1° $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 的解 $x=\varphi(t)$ 存在

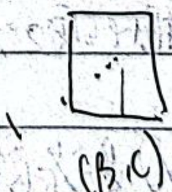
不妨设 (α,β) 是最大的存在区间

2° 要证 $\beta=+\infty$ 若不然 $\beta<+\infty$

$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds$

$|x(t)|\leq|x_0|+M|t-t_0|\leq H$, $t\in(\alpha,\beta)\Rightarrow x(t)$ 有界

$\{t_n\}\to\beta-0 \ (n\to\infty)$ $x(t_n)\to c \ (n\to\infty)$



$x(\beta-0)$ 存在的，$(\beta,x(\beta-0))$ 为初值，则初值问题的解在 $[\beta-h,\beta+h]$ 上存在

Date.

$$|x(t_1)-x(t_2)| \le \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))\,ds\right| \le M|t_1-t_2|$$

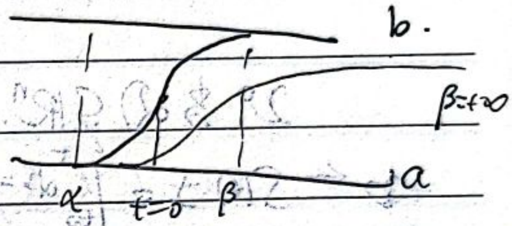
例 $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$ 的 的存在区间为有限数. $[1,2]$.

(不妨设 $b>0$, $t_0>0$).

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2 \ge t_0^2+x^2$$

例 设 $g\in C^1[(a,b),\mathbb{R}]$, $g(x)\ne 0$ (>0).

$\lim_{x\to a+0} g(x)=\lim_{x\to b-0} g(x)=0$.



证: (P) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=g(x)\\ x(0)=x_0\in(a,b)\end{cases}$ 解的最大存在区间为 (α,β), 其中 $\alpha=\int_{x_0}^{a}\frac{dx}{g(x)}$

$$\beta=\int_{x_0}^{b}\frac{dx}{g(x)}$$

[证明]. ∵ 由 $g(x)$ 及 $g'(x)$ 连续性知 (P) 的解局部存在. 唯一性可以得到.

有最大存在区间, 记为 (α,β)

设 $\varphi(t)$ 是 (P) 的解. $t\in(\alpha,\beta)$

$\begin{cases}\frac{d\varphi(t)}{dt}=g(\varphi(t))>0\\ \varphi(0)=x_0\in(a,b)\end{cases}$

$\varphi(t)$ 单调递增. $\varphi(t)$ 有界 则 $\varphi(\beta-0)$ 存在.

$\int_0^t \frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))}=\int_0^t dt=t$

$t\to\beta-0$, 以下证明 $t\to\beta-0$, $\varphi(t)\to b$?

1° $\beta<+\infty$ $\varphi(t)$ 有界, $d[(t,\varphi(t)),\partial D]\to 0$ $(t\to\beta-0)$ 则 $\varphi(\beta-0)=b$.

2° $\beta=+\infty$ $\varphi(\beta-0)=\delta<b$. $g(x)$ 在 $[x_0,\delta]$ 上能取到最小值, 记为 $m>0$

$\frac{d\varphi(t)}{dt}=g(\varphi(t))\ge m>0$, $\varphi(t)\ge mt+x_0\to+\infty$ 与 $\varphi(t)$ 有界矛盾!

于是 $\delta=b$

(CP)$_n$

例：$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$，$\vec{f}(t,\vec{x})$ 定义在 $\mathbb{R}\times D$，$D\subseteq\mathbb{R}^n$

设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在定义域上连续，且有界，并对 $\vec{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件

1° 若 $D=\mathbb{R}^n$，证明 (CP)$_n$ 的解的最大存在区间为 $\mathbb{R}$

$$\|\vec{x}(t)\| = \|\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x}(s))\,ds\| \le \|\vec{x}_0\|+M|t-t_0|<\hat{M}$$

$t<\beta$

2° 当 $D\subsetneq\mathbb{R}^n$，设 解的积分曲线几何长度有限，证明 (CP)$_n$ 的解的最大存在区间为 $\mathbb{R}$

$+\infty \leftarrow S(t)=\int_{t_0}^{t}ds=\int\sqrt{\sum x_i'^2(t)}\,dt=\int\sqrt{\|\vec{f}(t,\vec{x}(t))\|}\,dt \le \int_{t_0}^{t}M\,dt=M(t-t_0)$

$\le M(\beta-t_0)$

$\beta<+\infty$.

三、用压缩映象原理证明存在唯一性定理

度量空间的定义

(X,ρ)，言以下性质成立

1° $\rho(x,y)\ge 0$，$\forall x,y\in X$

2° $\rho(x,y)=0 \iff x=y$.

3° $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

称 ρ 为 X 上的一个度量，(X,ρ) 为度量空间

3.1.2. 基本序列（Cauchy 序列），$\{x_n\}\subset X$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n,m>N$，$d(x_m,x_n)<\varepsilon$ 称 $\{x_n\}$ 为基本序列

3.1.3 完备性 若称 X 上任意一个基本序列，存在 $x^*\in X$，使 $\rho(x_n,x^*)\to 0$ $(n\to\infty)$，称 (X,ρ) 为完备度量空间

3.14. 设 $A: X \to X$ 上的映射，并且满足：$\rho(Ax, Ay) \le \theta\rho(x,y)$. $0<\theta<1$. $\forall x,y \in X$. 称 A 为压缩的

3.15. (X,ρ) 是完备度量空间：$A: X \to X$ 压缩映射. 则存在唯一的 $x^* \in X$. 使 $Ax^* = x^*$ ← 不动点

【证明】 构造 $\{x_n\} \subset X$ ~~...~~ $x_{n+1} = Ax_n$

~~若可证明 $\{x_n\}$ 基本~~ $x_n \xrightarrow{\rho} x^*$

$x_{n+1} = Ax_n$

$\rho \downarrow \quad \downarrow \rho \qquad \rho(Ax_n, Ax^*) \le \theta\rho(x_n, x^*) \to 0.$

$x^* = Ax^*$

$x^* = Ax^*,\ y^* = Ay^*$

$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*) \le \theta\rho(x^*, y^*)$, $\theta = (0,1)$

$\Rightarrow x^* = y^*$

再证 $\{x_n\}$ 基本

设 $m>n$. $\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m-1}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le \theta^n \dfrac{1-\theta^{m-n}}{1-\theta}\rho(x_1,x_2)$

$\le \dfrac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_2) \to 0$ $(n\to\infty)$

ρ ~~(x_m, x_n)~~

$$(CP)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\}$

$f(t,x)$ 在 R 连续，关于 x 满足 Lipschitz 条件 (L 常数)

则 (CP) 的解在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上存在且唯一，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}, ?\}$

$M = \max\limits_{(t,x)\in R} |f(t,x)|$

用压缩映射原理证明：1° $\Omega = \{\varphi \in C[t_0-h, t_0+h] \mid |\varphi(t) - x_0| \le b\}$

$\|\varphi\| = \max\limits_{t\in[t_0-h, t_0+h]} |\varphi(t)|$, $\rho(\varphi, \psi) \triangleq \|\varphi - \psi\|$, $\forall \varphi, \psi \in \Omega$.

$2°$ 在Ω上定义映射，$\forall \varphi \in \Omega$，$[A\varphi](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$

$3°$ (Ω, ρ) 是完备的度量空间。

设$\{\varphi_n\}$是Ω上的基本序列，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n, m > N$时，$\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon$

固定$t \in I$，$\{\varphi_n(t)\} \subset \mathbb{R}$上的基本列 $\varphi^*(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$

$|\varphi^*(t) - \varphi_m(t)| \to 0$，$\forall t \in I$.

$\|\varphi^*(t) - \varphi_m\| \to 0$ $(m \to \infty)$

$\varphi^*(t)$ 是 φ_m 上的连续函数

$4°$ $A: \Omega \to \Omega$ 的上的压缩映射.

用压缩映射原理证明：

$$(E)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$.

其中 L 为 Lipschitz 常数 $L > 0$.

(E)的解在 $[t_0 - \hat{h}, t_0 + \hat{h}]$ 上存在 $\hat{h} = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L}\}$ $\theta \in (0,1)$.

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$\|A\varphi - A\psi\| \le \theta\|\varphi - \psi\|$ 其中 $\|\varphi\| \triangleq \max_{t \in [t-\hat{h}, t+\hat{h}]} |\varphi(t)|$.

取 $\|\varphi\|_\Delta = \max_{t \in [t_0-\hat{h}, t_0+\hat{h}]} e^{-L|t-t_0|} |\varphi(t)|$ (Ω是$[t_0 - h, t_0 + h] \times [x_0 - b, x_0 + b]$上连续函数全体)

易证 $(\|\cdot\|_\Delta, \Omega)$ 是度量空间，完备性

$$e^{-L|t-t_0|} \cdot \left| [A\varphi](t) - [A\psi](t) \right| \le \int_{t_0}^{t} \left| f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s)) \right| ds$$

不妨记 $s < t_0$，

$$\le \int_{t_0}^{t} e^{-L|t-t_0|} L \left| \varphi(s) - \psi(s) \right| ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)} L \cdot e^{-L(s-t_0)} \left| \varphi(s) - \psi(s) \right| ds$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)} L\, ds \right| \cdot \|\varphi - \psi\|_\Delta$$

$\|A\varphi - A\psi\|_\Delta \leq \theta\|\varphi-\psi\|_\Delta \quad \theta\in(0,1)$.

例 用压缩映像原理 证明隐函数定理

1° $F(x,y)$，$F_y(x,y)$ 在区域 $\bar{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b\}$ 上二元连续的

2° $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$（不妨设 >0）.

则存在 $\delta>0$，在 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$ 满足

(A) $\varphi(x_0)=y_0$，(B) $F(x,\varphi(x))=0$. $\forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

[证明] 由 $F_y(x_0,y_0)>0$，及 函数的连续性，存在 $r>0$，使 $F_y(x,y)$ 于

$R_1=\{(x,y)\in\bar{R} \mid |x-x_0|\leq r, |y-y_0|\leq r\}$ 为大于0的，于是存在

$m\leq F_y(x,y)\leq M$. $M,m>0$.

$F(x,y_0)$ 于 $x=x_0$ 的连续性

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 有 $|F(x,y_0)|\leq\varepsilon$

~~特别地~~，$\varepsilon=mr$

$\Omega = \{\varphi\in C[x_0-\delta, x_0+\delta] \mid \varphi(x_0)=y_0, |\varphi(x)-y_0|\leq r\}$

$A:\Omega\to\Omega$，对于 $\forall\varphi\in\Omega$，定义 $[A\varphi](x) \triangleq \varphi(x)-\frac{1}{M}F(x,\varphi(x))$

再证 $A:\Omega\to\Omega$.　　　（1）连续性显然成立

由 $[A\varphi](x_0)=\varphi(x_0)-\frac{1}{M}F(x_0,\varphi(x_0))=y_0$

(2) $|[A\varphi](x)-y_0| = \left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}F(x,\varphi(x))\right|$

$=\left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}F(x,\varphi(x))+\frac{1}{M}F(x,y_0)-\frac{1}{M}F(x,y_0)\right|$

$\leq\left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}\left(F(x,\varphi(x))-F(x,y_0)\right)\right|+\frac{1}{M}F(x,y_0)$

$= |\varphi(x) - y_0 - \frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial y}(x,\xi)(\varphi(x)-y_0)| + \frac{mr}{M}$

$\le (1-\frac{m}{M})r + \frac{mr}{M} = r$

证明 A 是 Ω 到 Ω 上的压缩映射.

$\|A\varphi - A\psi\| = \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |[A\varphi](x) - [A\psi](x)| = |\varphi(x)-\psi(x) - \frac{1}{M}[F(x,\varphi(x)) - F(x,\psi(x))]|$

$= |\varphi(x)-\psi(x) - \frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial y}(x,\xi)(\varphi(x)-\psi(x))| \le (1-\frac{m}{M})\|\varphi-\psi\|$ #

$\exists\varphi^* \in \Omega$ s.t. $A\varphi^* = \varphi^*$

$F(x,\varphi(x)) \equiv 0$

$F_x + F_y\cdot\varphi'(x) = 0$

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x) = \dfrac{-F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} \end{cases}$$

~~$\varphi^* \in \Omega$ s.t. $A\varphi^* = \varphi^*$~~

(四) 定理. 关于初值参数依赖性

$(CP)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $f(t,x)$ 在 Ω 上连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件

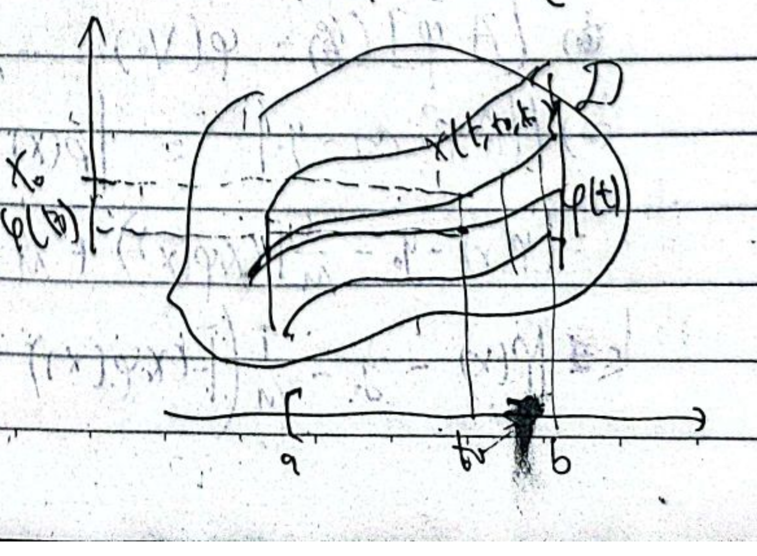
设 $\varphi(t)$ 是 $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上一解，则存在 $\eta > 0$,

当 $|x_0 - \varphi(t_0)| \le \eta$ 时，($t_0 \in [a,b]$)，则有

1° $x(t,t_0,x_0)$ 在 $[a,b]$ 上存在

2° $x(t,t_0,x_0)$ 在区域 $\{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}^3 \mid t\in[a,b], t_0\in[a,b], |x_0-\varphi(t_0)| \le \eta\}$

是三元连续函数.



No.

Date.

$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$

$|x(t) - \varphi(t)| \le |x_0 - \varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L|x(s)-\varphi(s)|\,ds$

用Gronwall不等式 $|x(t)-\varphi(t)| \le \underbrace{|x_0-\varphi(t_0)|}_{\eta e^{-L(b-a)}} e^{L(t-t_0)}$.

[证明]: ~~由~~ $\varphi(t)$ 在$[a,b]$上存在, $(t,\varphi(t)) \subset D$, 于是

存在 $\eta_1>0$. $Q = \{(t,x) \mid t\in[a,b], |x-\varphi(t)| \le \eta_1\} \subset D$

令 $\eta = \eta_1 e^{-L(b-a)} > 0$

(1) $\Omega = \{\psi \in C[a,b] \mid \|\psi-\varphi\|_\Delta \le \eta\}$;

易证 $(\Omega, \|\cdot\|_\Delta)$ 是一个完备的度量空间. $\|\psi\|_\Delta = \max_{t\in[a,b]} e^{-L|t-t_0|}\|\psi(t)\|$

(2) 定义 Ω 上的映射 A:

$[A\psi](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\,ds$, $\psi\in\Omega$.

(3) 证明: $A: \Omega \to \Omega$

(a) 易知 $[A\psi](t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数

(b) $|[A\psi](t) - \varphi(t)| = |x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\,ds - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds|$

$\le |x_0-\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))|\,ds$

$\le \eta + \int_{t_0}^{t} L|\psi(s)-\varphi(s)|\,ds \le \eta + \int_{t_0}^{t} L\, \underbrace{e^{-L|t-t_0|}|\psi(s)-\varphi(s)|}_{\le \|\psi-\varphi\|_\Delta} e^{L(s-t_0)}\,ds$

$\cancel{\le \|\psi - \varphi\|} \le \eta + \left(e^{L(s-t_0)}\Big|_{t_0}^{t}\right)\eta$

$\le \eta + \left(e^{L(t-t_0)} - 1\right)\eta = e^{L(t-t_0)} \cdot \eta$

$e^{-L(t-t_0)} \cdot \left|[A\psi](t) - \varphi(t)\right| \le \eta$

$\cancel{\|A\psi - \varphi\| \, e^{L(t-t_0)}}$

$\|A\psi - \varphi\|_\Delta \le \eta.$

(~~****~~) 压缩性与之前一致。

于是根据压缩映照原理，存在 $\psi^* \in \Omega$: $A\psi^* = \psi^*$

证明 $x(t, t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 二元连续

$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0))\, ds$

$y(t, t_1, x_1) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s, t_1, x_1))\, ds$

$a \le t_0,\ t_1 \le b$

$|x(t) - y(t)| \le |x_0 - x_1| + \left|\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))\, ds\right| + \int_{t_1}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds$

[证明]: 由 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有界，$(t, \varphi(t)) \subset D$，

$\le |x_0 - x_1| + M|t_1 - t_0| + \int_{t_1}^{t} L\, |x(s) - y(s)|\, ds$

用 Gronwall 不等式

$|x(t) - y(t)| \le \left(|x_0 - x_1| + M|t_1 - t_0|\right) e^{L(b-a)}$

$\left((t_0, x_0) \to (t_1, x_1)\right) \longrightarrow 0$

作业： [illegible] P1.

[illegible] 2. }

Date.

四、解关于初值、参数的连续依赖性

4.1 (CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 的解 $x(t, t_0, x_0)$, $t \in [a,b]$

定理4.2. (CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(CP)_g \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t,x) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

(解关于方程函数的依赖性)

设 $x(t,t_0,x_0)$ 表示(CP)的解, $t \in [a,b]$,

若 $\|g\| < \delta \ll 1$ 时, 则 $y(t, t_0, x_0)$ 表示$(CP)_g$ 的解在 $[a,b]$ 上亦存在.

[证明] 存在性证明 (用压缩映射证明)

(作业!)

$$2^\circ \ |y(t) - x(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, y(s)) + g(s, y(s))]\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, x(s))|\, ds + \int_{t_0}^{t} |g(s, y(s))|\, ds$$

$$\le L \cdot \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\, ds + \delta(b-a)$$

由 Gronwall 不等式, $|x(t) - y(t)| \le \delta(b-a)\, e^{L(b-a)} \to 0 \ (\delta \to 0)$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, μ为参数 解关于参数的连续依赖性

$\Longleftrightarrow$ $(CP)_{\mu_0} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(CP)_\mu \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu_0) + \underbrace{[f(t,x,\mu) - f(t,x,\mu_0)]}_{\|g(t,x)\| < \delta \ll 1} \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$

当 $f(t,x,\mu)$ 关于 (t,x,μ) 连续

当 $|\mu - \mu_0| < \hat{\delta} \ll 1$ 时, 就有 $|f(t,x,\mu) - f(t,x,\mu_0)| < \delta \ll 1$

第五章 定性理论初步

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$

$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 质点上的位移. $\dot{\vec{x}}(t)$ 速度

$\vec{f}(t, \vec{x})$ — 速度场, 方向场

$\vec{f}(t, \vec{x}) \equiv \vec{f}(\vec{x})$, 自治系统, 定常系统, 时不变系统 (*)

↳ 显含 t, 非自治系统, 非定常系统, 时变系统

自治系统: e.g. $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

非自治系统: e.g. $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\cdot\vec{x}$

设 $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$. 使 $\vec{f}(t, \vec{x}^*) = \vec{0}$.

称之为系统 (*) 的平衡点, 特别地, 当自治系统时, $\vec{x}^*$ 又称之为奇点

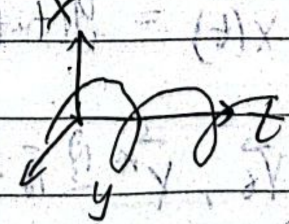
$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}^* = 0$, $A\vec{x}^* = \vec{0}$

$\frac{dx}{dt} = \sin x$. 无穷多个 x_k^*, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

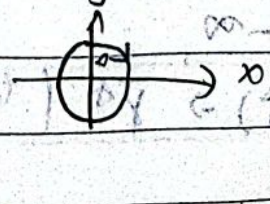
△ $\mathbb{R}^n$. 一称之为相空间 (n=2 相平面, n=1, 相线)

△ $(t, \vec{x}(t))$ — 积分曲线在相空间中的投影. 称之为系统 (*) 的轨线 (相轨线), 随着时间 t 增加, 质点移动的方向称为轨线的方向. (用箭头来表示)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & x(0)=0 \\ \frac{dy}{dt} = -x & y(0)=1 \end{cases}$$



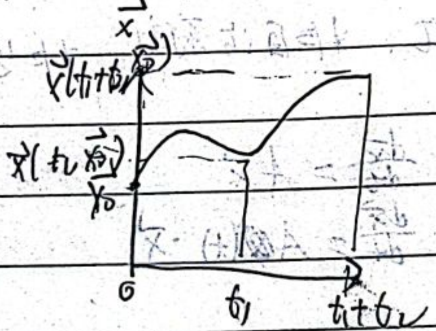
$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x}$, $x^2+y^2=1$



一、自治系统的若干性质

性质1. 设 $\vec{x}(t)$ 是自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 的任一解
(平移不变性). 则 $\vec{x}(t+C)$ 也是该自治系统的解

性质2. 设 $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ 表示从 $(0, \vec{x}_0)$ 出发的自治系统的轨线,
则有 $\vec{x}(t_1+t_2, \vec{x}_0)=\vec{x}(t_2, \vec{x}(t_1, \vec{x}_0))$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
(解的性质)



$$\vec{x}(t+t_1, \vec{x}_0)=\vec{x}(t, \vec{x}(t_1, \vec{x}_0))$$
1° 平移不变性
2° 解的存在唯一性

性质3 自治系统在相空间中任意两条不同的轨线都不可能在有限时间相交. 若相交, 即重合.

[证明] 令 $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ 是系统的两条轨线, $\vec{x}(t_1)=\vec{y}(t_2)$

$$\vec{x}(t)\Big|_{t=t_1}=\vec{y}(t-t_1+t_2)\Big|_{t=t_1}$$

唯一性可知 $\vec{x}(t)=\vec{y}(t-t_1+t_2)$ $(\forall t)$

性质4 (1) 若 $\vec{x}^* \neq \vec{x}_0$, $\vec{x}^*$ 是自治系统的奇点, 有 $\vec{x}(t, \vec{x}_0) \to \vec{x}^*$ $(t \to \beta^{+\infty}_{-\infty})$
则 $\beta=+\infty$ 或 $-\infty$

(2) 若 $\vec{x}(t, \vec{x}_0) \to \vec{x}^*$ $(t \to {}^{+\infty}_{-\infty})$ 则 $\vec{f}(\vec{x}^*)=\vec{0}$, 从而 $\vec{x}^*$ 为奇点
↳ 系统的奇点

[证明] 若不然 $f_i(\vec{x}^*) \neq 0$.

不妨设 >0, $\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}(t)) > \frac{f_i(\vec{x}^*)}{2} > 0$.

二. 平面线性自治系统奇点的分类

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $\det(A) \neq 0$ $\vec{x}^* = \vec{0}$ 是奇点

设 λ_1, λ_2 为 A 的特征值.

$1°$ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. $\vec{x} = P\vec{y}$, $\frac{d\vec{y}}{dt} = P^{-1}AP\vec{y}$

$2°$. $\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \dot{y}_2 = -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = r\cos\theta \\ y_2 = r\sin\theta \end{cases}$

$y_1^2 + y_2^2 = r^2$. $2r\dot{r} = 2y_1 \cdot \dot{y}_1 + 2y_2 \cdot \dot{y}_2$

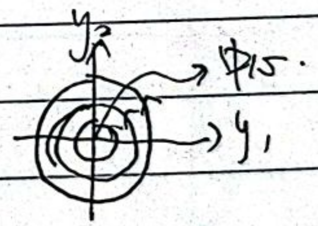
$\tan\theta = \frac{y_2}{y_1}$ $r\dot{r} = y_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + y_2(-\beta y_1 + \alpha y_2)$

$= \alpha y_1^2 + \alpha y_2^2 = \alpha r^2$

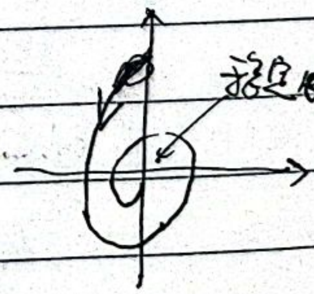
$\dot{\theta} = \frac{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_1}{y_1^2}$ $\frac{dr}{dt} = \alpha r$ $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$

$\frac{d\theta}{dt} = -\beta$ $\theta(t) = -\beta t + \theta_0$

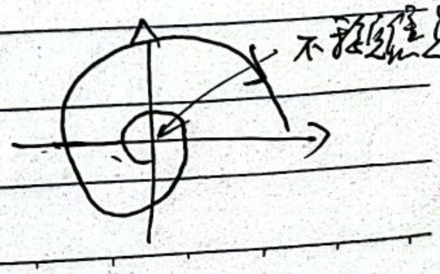
(1) $\alpha = 0$. $\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = -\beta t + \theta_0 \end{cases}$



(2) $\alpha < 0$. $\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \to 0 \ (t \to +\infty) \\ \theta(t) = -\beta t + \theta_0 \end{cases}$



(3) $\alpha > 0$.

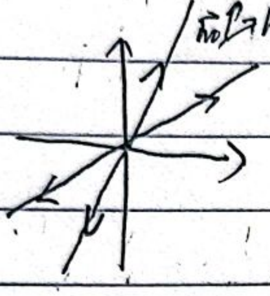


2° $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. $\vec{h_1}, \vec{h_2}$ 特征向量

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}$

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1}$

$\vec{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}$ 对应 两条半直线

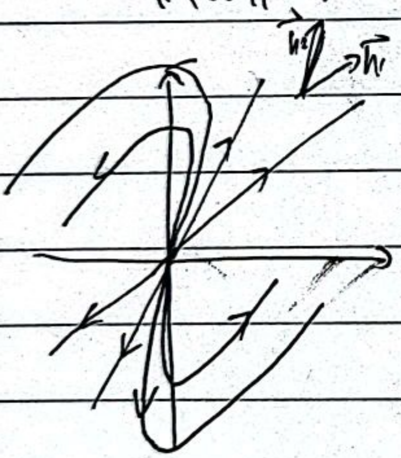


$$\frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|} = \frac{c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}}{\|c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}\|}$$

$$= \frac{c_1\lambda_1\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\vec{h_2}}{\|c_1\lambda_1\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\vec{h_2}\|} \to \pm\frac{\vec{h_1}}{\|\vec{h_1}\|} \quad (t\to+\infty)$$

$\vec{x}(t) \to \vec{0} \quad (t\to-\infty)$

$\|\vec{x}(t)\| \to +\infty \quad (t\to+\infty)$.



不稳定结点 $(\lambda_1 > \lambda_2 > 0)$

(稳定结点 $(\lambda_1 < \lambda_2 < 0)$).

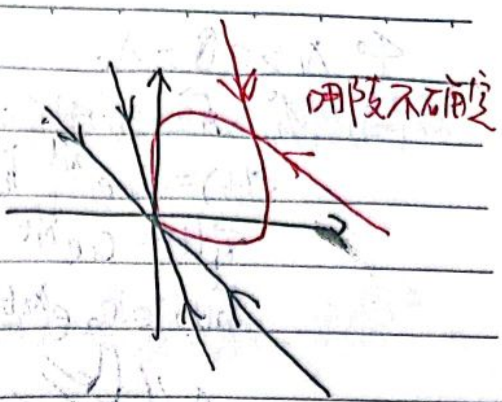
例. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x-3y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

奇点 O是稳定的结点

$y(t) = \underbrace{k}_{待定} x(t)$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{-2x-3y}$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{-2k-3}$ $k_1 = -1,\ k_2 = -2$

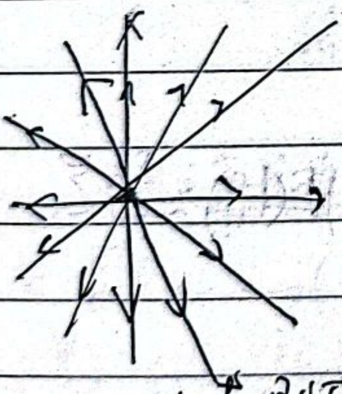


由第一象限中斜率>0，得为（确定是哪段）

3° $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (<0).

3.1 若是有二重的特征向量 $\vec{h_1}, \vec{h_2}$

$\vec{x}(t) = (C_1\vec{h_1} + C_2\vec{h_2})e^{\lambda t}$



临界结点

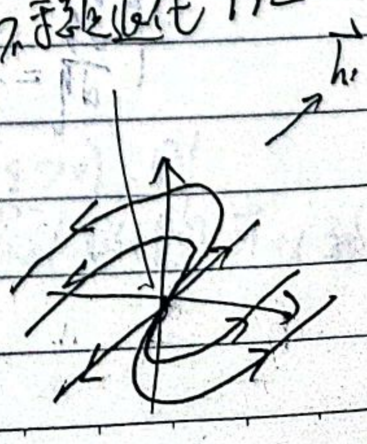
(不稳定)

3.2 设 $\vec{h_1}$ 是特征向量 $\vec{h_2}$ 是广义特征向量

不稳定退化结点

$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{h_1} + C_2 e^{\lambda t}(\vec{h_1} + \vec{h_2})$

$\vec{x_1}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{h_1}$ 一两条射线



$\frac{\vec{x}(t)}{\|\vec{x}(t)\|} \to \pm\frac{\vec{h_1}}{\|\vec{h_1}\|}$ $(t \to \pm\infty)$

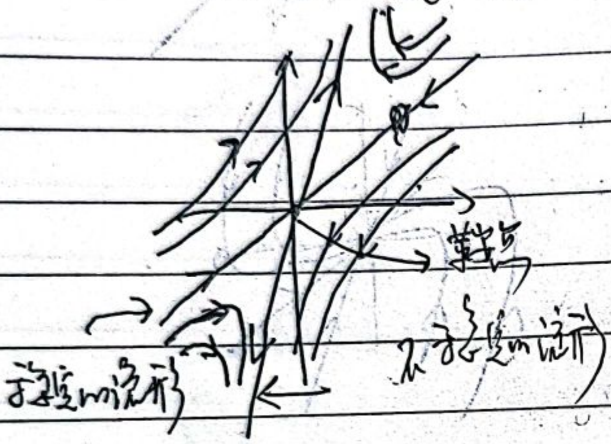
4° $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

$\vec{h}_1$、$\vec{h}_2$ 特征向量

$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h}_2$

$\vec{x}_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1$ 对应四条直线

$\vec{x}_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h}_2$



$\|\vec{x}(t) - \vec{x}_1(t)\| \to 0 \quad (t \to +\infty)$

$\|\vec{x}(t) - \vec{x}_2(t)\| \to 0 \quad (t \to -\infty)$

例 $\dfrac{dx}{dt} = x+y-2$

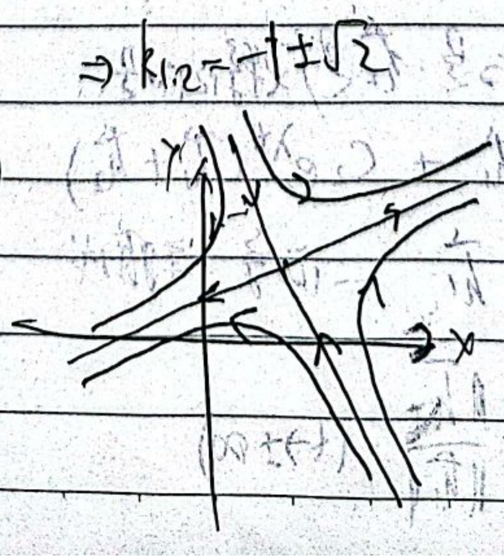
$\dfrac{dy}{dt} = x-y.$

令 $\begin{cases} \xi = x-1 \\ \eta = y-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \xi+\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \xi-\eta \end{cases}$

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) = (1,1)$ 奇点

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ $\therefore (x^*, y^*) = (1,1)$ 为鞍点.

$\begin{cases} \eta = k\xi(t) \\ \dfrac{d\xi}{d\eta} = \dfrac{\xi+\eta}{\xi-\eta} \end{cases} \Rightarrow k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$



三、平面自治系统奇点的分类

(*) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})$ 其中 $\vec{g}(\vec{x})$ 具有连续的一阶偏导数，$\vec{g}(\vec{0})=\vec{0}$

称 (*) 为 (※) 的扰动系统

~~称之称 (*) 为 (※) 一次近似系统~~

(※) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$，$\vec{x}\in R^2$

~~一般地，设 $\vec{x}=\vec{x}^*$ 是系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 的奇点，$\vec{x}\in R^2$~~

作 $\vec{y}=\vec{x}-\vec{x}^*$ $\quad \frac{d\vec{y}}{dt}=\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})=\underbrace{\vec{f}(\vec{x}^*)}_{\vec{0}}+\underbrace{D\vec{f}(\vec{x}^*)}_{A}\vec{y}+o(\|\vec{y}\|)$

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=A\vec{y}+o(\|\vec{y}\|)$$

$$\vec{f}(\vec{x})=(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2))^T$$

$$D\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} \sim \text{Jacobi 矩阵}$$

Perron 定理（第一定理）

若 $\vec{g}(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$，$(\|\vec{x}\|\to 0)$，则系统 (*) 的奇点 0 的性质（鞍点、结点、焦点）可以被系统 (※) 的奇点 0 确定

Perron 第二定理 若 $\vec{g}(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|^{1+\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ 则系统 (*) 奇点 0 的性质（鞍点、结点、焦点、临界结点、退化结点）可以被系统 (※) 的奇点 0 所决定

推论

若 $g(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$，且奇点 O 是系统 $(*)$ 的中心，则奇点 O 是系统 $(*)$ 的中心或焦点（或中心焦点），若 $\vec{f}(\vec{x})$ 是解析的，则为中心或焦点

例

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+y^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-b^2x-2ay+x^3\end{cases}\qquad (a\neq 0,\ b>0).$$

$$\begin{cases}y+y^3=0\\ -b^2x-2ay+x^3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=\pm b\ /\ 0.\end{cases}$$

$O(0,0)\quad P_+(b,0)\quad P_-(-b,0)$

$$D\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 1+3y^2\\ -b^2+3x^2 & -2a\end{pmatrix}\qquad \lambda_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-b^2}$$

$$D\vec{f}(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b^2 & -2a\end{pmatrix}$$

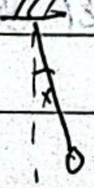
1° $a>0$ 　$a^2\geq b^2$ 稳定结点；$a^2<b^2$ 稳定焦点

2° $a<0$ —— 不稳定结点；—— 不稳定焦点

$$D\vec{f}(\pm b,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2b^2 & -2a\end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+2b^2}$

例．$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin x=0$．　$\begin{cases}y=0\\ \sin x=0\end{cases}$　$(k\pi,0)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x \end{cases}$$

判断奇点类型

$$D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

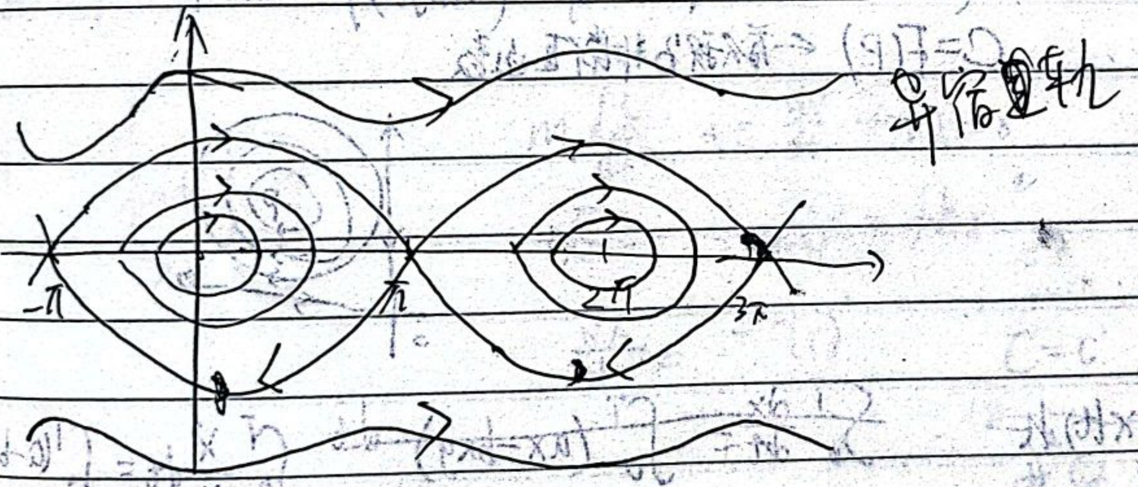
$k=2m$, $D\vec{f}(2m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$ ~~中心~~/焦点 ✓

$k=2m+1$, $D\vec{f}((2m+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ 鞍点.

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{-\frac{g}{l}\sin x}$, $-\frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}\cos x = C$ (首次积分).

若为焦点

$(x(t), y(t)) \to \vec{0}$ ($t \to \pm\infty$) 矛盾!



(不一定稳定)

P148 6

P166 1 (1)(3)(5)(7) 2 6

P167 8 (结合先看)

例. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$ $(a, b, c, d > 0)$

奇点 $O(0,0)$ $P(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

$\vec{Df}(x,y) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$ $\vec{Df}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

鞍点

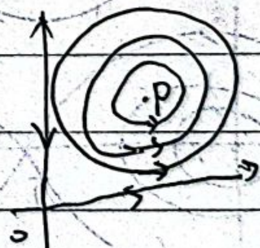
$\vec{Df}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$

奇点P是为中心或焦点

$\frac{dx}{dy} = \frac{ax - bxy}{-cy + dxy}$ $F(x,y) = C$. 首次积分

若为焦点 $(t \to +\infty$ 或 $-\infty)$ $(x(t), y(t)) \xrightarrow{\text{||·||}} P$

$C = F(P)$ ← 首次积分非常值函数



$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$ ~~$\int_0^T \frac{dx}{dt} = \int_0^T (ax - bxy)\,dt$~~ $\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}\,dt = \int_0^T (a - by)\,dt$

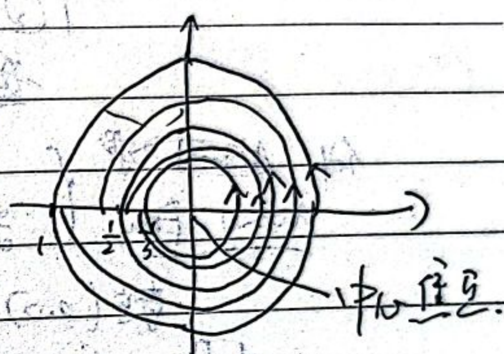
$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$ $0 = \int_0^T a\,dt - b\int_0^T y(t)\,dt$

$\bar{x} = \frac{c}{d}$ $\bar{y} = \frac{a}{b}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \overset{(a-\varepsilon)}{a}x - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -\underset{(c+\varepsilon)}{c}y + dxy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{d} \qquad \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}$$

例 $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r^3 \sin\dfrac{\pi}{r} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$ $\quad r^3 \sin\frac{\pi}{r} = 0,\ r_1^* = 0,\ r_k^* = \frac{1}{k}$



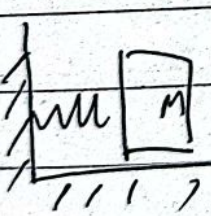
$1 < r < 2 . \quad \dot{r} < 0$

$2 < r < 3 \quad \dot{r} > 0$

$\vdots$

四. 平面自治系统 — 闭轨线，极限圈

例



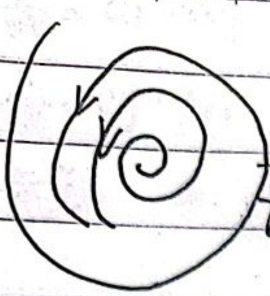
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -c(\dot{x})^2 \qquad c = c(x, \dot{x}) \text{ 自激振荡}$$

闭轨线，

极限圈.



稳定的极限圆

不稳定的极限圆.

极限圆(定义) $\begin{cases} ① 孤立的闭轨线 \\ ② 闭轨线领域中的 其它系统的轨线 \end{cases}$

都是趋向于(离开于)该闭轨线

例 Normal Form $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$

奇点 $(0,0)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

由Perron定理可知 $(0,0)$ 是不稳定的焦点.

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2=r^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad 2rr' = 2x\dot{x}+2y\dot{y} \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2}$

$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1-r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$ $\quad 2r\frac{dr}{dt} = 2r^2(1-r^2)$

$\frac{dr^2}{dt} = 2r^2(1-r^2)$

$$\frac{dr^2}{r^2(1-r^2)} = 2dt$$

$$\int \frac{1}{r^2}\,dr^2 = \int \frac{d(1-r^2)}{1-r^2} = \int 2dt$$

$$\ln|r^2| - \ln|1-r^2| = 2t+C$$

$$\ln\left|\frac{r^2}{1-r^2}\right| = 2t+C, \quad \frac{r^2}{1-r^2} = e^{2t}\cdot C$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}\cdot C}{1+e^{2t}\cdot C} \qquad r^2 = \frac{1}{1+e^{-2t}\cdot C}$$

$r = \sqrt{\dfrac{1}{1+e^{-2t}C}}$　　$r(1-r^2)=0$

$r_1^* = 0,\ r_2^* = 1$

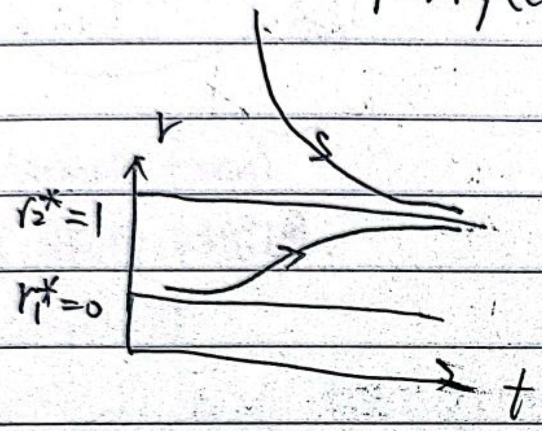
$r(t) = 1$

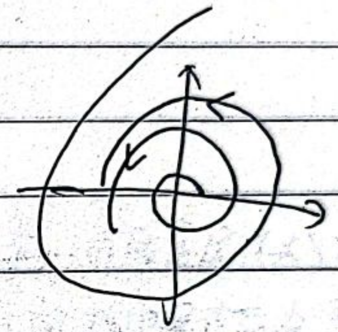
(i) 轨线[illegible] $(c>0)$　　$r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$

$r(t)\to 0\ (t\to-\infty)$

(ii) 轨线[illegible] $(c<0)$.　　$r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$

$r(t)$ 发散 $(t\to t^*)$





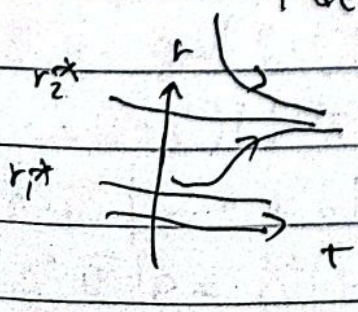
例 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - \omega y + \xi x(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + \mu y + \xi y(x^2+y^2) \end{cases}$　$(\mu\in\mathbb{R},\ \omega\neq 0,\ \xi=\pm 1)$

$O(0,0)$,　$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$　　$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\mu+\xi r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$

1° $\xi=-1$　$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\mu-r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$　$r(\mu-r^2)=0$,　$r^*=?$

(1) $\mu<0$, $r_1^*=0$.　$r(t)\to r_1^*\ (t\to+\infty)$

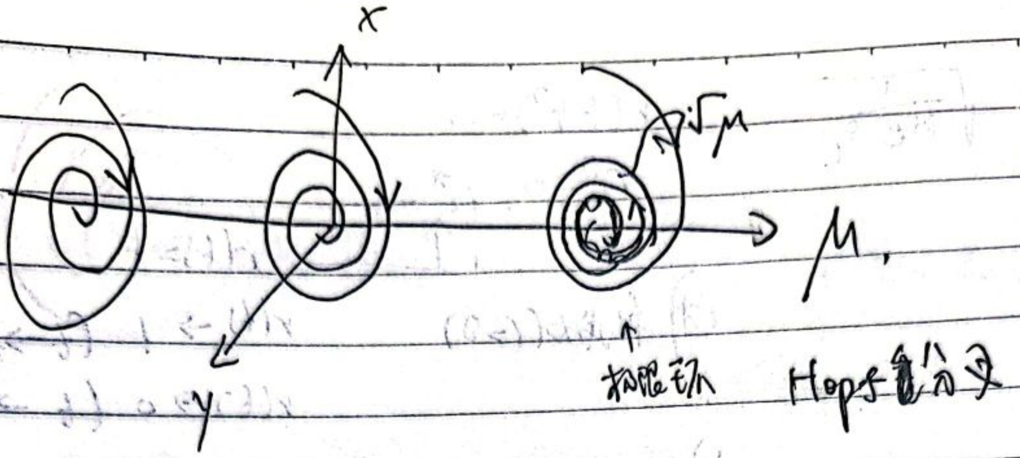
稳定焦点　(2) $\mu=0$, $\dot r = -r^3$, $r_1^*=0$ $r(t)\to r_1^*$ $(t\to+\infty)$



(3) $\mu>0$, $\dot r = r(\mu-r^2)$　$r_1^*=0$, $r_2^*=\sqrt{\mu}$

$r_1^*=0$ 对应奇点为不稳定焦点

$r_2^*=\sqrt{\mu}$ 对应 闭轨线是 稳定的极限环



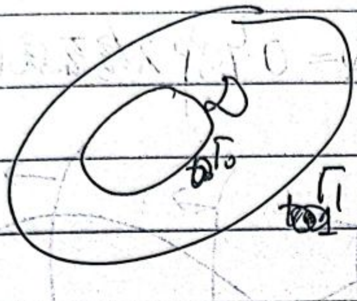
2°, $\xi=1$. (作业).

Date .

平面自治系统的极限圈, 闭轨线

$$(*)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}\qquad (x(t),y(t))=(x(t+T),y(t+T))$$

周期解

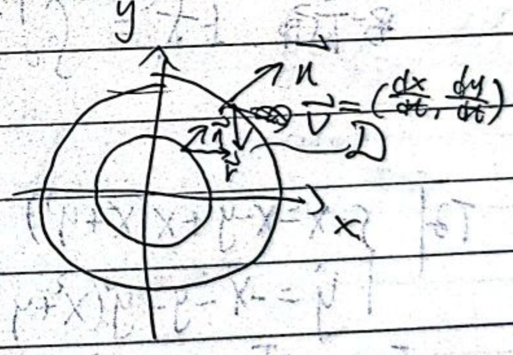


1 标准型 (Normal Form)

直接计算闭轨线, 极限圆.

2. Bendixson 定理

考虑一个环域 D, 在 D 中无系统 $(*)$ 的奇点, 并且系统 $(*)$ 轨线在环域 D 的边界上, 同时进入(或离开)环域 D, 则在环域 D 中至少存在系统 $(*)$ 的一个闭域



例 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2)\triangleq P\\ \frac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2)\triangleq Q.\end{cases}$

系统存在稳定的极限圆

在 D 中无系统的奇点.

$D=\{(x,y)\in R^2\mid r\le x^2+y^2\le R,\ 0<r<1<R\}$

$\vec{n}=(x,y),\ \vec{v}=(P,Q).$

~~$\vec{n}\cdot\vec{v}|_r=r^2(1-r^2)>0$~~

$\vec{n}\cdot\vec{v}=\text{grad}\ f\cdot(P,Q)=(x,y)(x+y-x(x^2+y^2),-x+y-y(x^2+y^2))$

$=(x^2+y^2)(1-(x^2+y^2))$ ~~$=R^2(1-R^2)$~~

则 $\vec{n}\cdot\vec{v}|_r=r^2(1-r^2)>0$

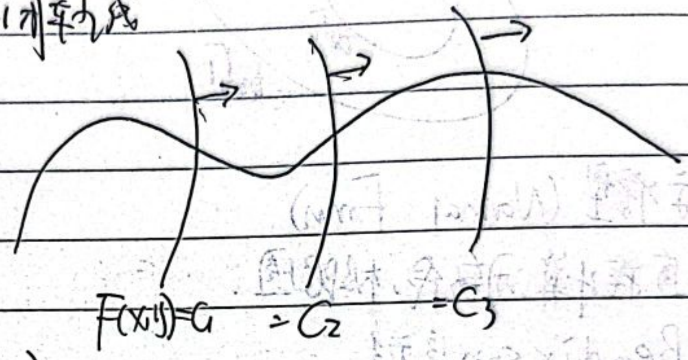
$\vec{n}\cdot\vec{v}|_R=R^2(1-R^2)<0$

3. 判别法——闭轨线不存在

(一) 判别法（切性判别法）

设 $F(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数于 S 中（R^2），并且 $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot P+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot Q$ 保持常号于 S 中.（grad $F\cdot(P,Q)=$）

进一步，$\Omega=\{(x,y)\in S \mid \frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=0\}$ 中不含系统 $(*)$ 的非奇点与整条轨线，则系统 $(*)$ 于 S 中无闭轨线



[证明] $0=\int_0^T \frac{dF(x(t),y(t))}{dt}dt$，其中 $(x(t),y(t))$ 为系统 $(*)$ 于 S 中的闭轨线，T 为周期数.

另一方面，上式 $=\int_0^T\left[\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))}\dot{y}\right]dt\neq 0$. 矛盾

#

例
$$\begin{cases}\dot{x}=x-y+x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=-x-y-y(x^2+y^2)\end{cases}\qquad F(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)$$

$$\Omega=\{(0,0)\}$$

平面自治系统中的极限环，闭轨线

(二) 设 $S\subset R^2$ 为单连通的区域，P,Q 于 S 中具有连续的一阶偏导数

Bendixson判别法　$\mathrm{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\neq 0$ 于 S 中 $\to$ $\mathrm{div}(Pu,Qu)=\frac{\partial Pu}{\partial x}+\frac{\partial Qu}{\partial y}\neq 0$

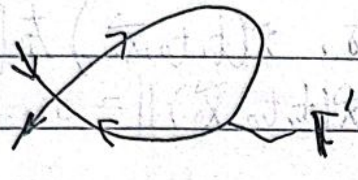
则系统 $(*)$ 于 S 中无闭轨线

Dulac

[证明] 设 $(x(t), y(t))$ 为闭轨线 Γ，周期为 T. 闭轨线 Γ 围成的区域为 $\tilde{\Omega} \subset S$.

$$0 \neq \iint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\Gamma} P\,dy - Q\,dx = 0$$

Green公式

注  闭轨 (奇点∪闭轨线)

(3)

例 $\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha-\beta x)x + \left(\gamma-\delta\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = 0$，$\gamma \neq 0$.

$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$

$\Downarrow$

$S(x,y) = C$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -(\alpha-\beta x)x - (\gamma-\delta y)y = Q(x,y) \end{cases}$$

1° $\delta = 0$ 时 $\gamma \neq 0$

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y} = 2\delta y - \gamma$　2° $\delta \neq 0$ 时 $y = \frac{\gamma}{2\delta}$

$u(x,0) = \gamma e^{-2\delta x}$　$\frac{\partial P u}{\partial x} + \frac{\partial Q u}{\partial y} = -\gamma^2 e^{-2\delta x} \neq 0$

五 稳定性 (Lyapunov意义下)

$$(*) \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

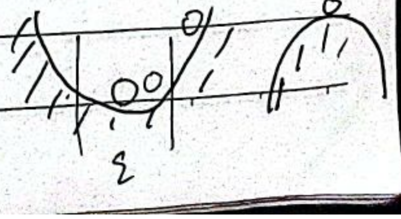
并且设 $\vec{x}^* = \vec{0}$ 是 $(*)$ 的解 (零解) $\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)$

定义若干关于零解在Lyapunov意义下的稳定性

1° 零解稳定定义

对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$，当 $\|\vec{x}_0\| < \delta$ 时，有 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\| < \varepsilon$
(对于 $\forall t \in [t_0, +\infty)$)

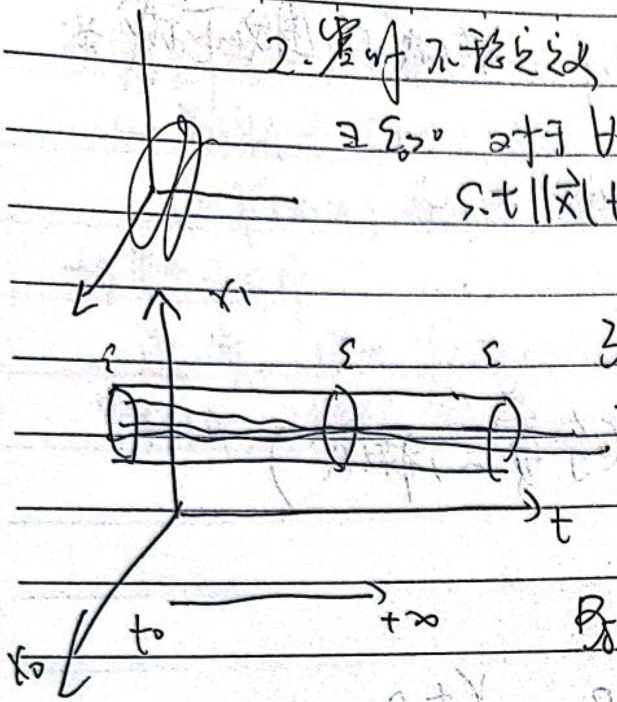
$\lim_{\|\vec{x}_0\| \to 0} \|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\| = 0$ $(\forall t \in [t_0, +\infty))$



2. 零解不稳定定义（否定稳定的定义）

$\exists \varepsilon_0>0$，对于 $\forall \delta>0$，$\|\vec{x}_0\|<\delta$，$\vec{x}_0\neq\vec{0}$，存在 $t^*\in[t_0,+\infty)$

s.t. $\|\vec{x}(t^*,t_0,\vec{x}_0)\|\geq\varepsilon_0$.



3° 零解的渐近性

$\exists\delta>0$，$\|\vec{x}_0\|<\delta$，$\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在

满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\|=0$.

$B_\delta=\{\|\vec{x}_0\|<\delta\}$ 称之为零解的吸引域，零解为吸引子

局部吸引 → 全局吸引

4° 零解的渐近稳定 $\begin{cases}① 稳定\\② 渐近吸引\end{cases}$

例：$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 线性系统的零解在 Lyapunov 下的稳定性满足如下性质：

(1) 若系统的一切解在 $[t_0,+\infty)$ 上有界 ⟺ 系统(*)的零解是稳定的

(2) 若系统(*)的任意解满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t)\|=0$. ⟺ 系统(*)的零解是渐近稳定的

(2) 由(1)直接推出，只需证(1)

[证明] (1) "⟸" $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，当 $\|\vec{x}_0\|<\delta$，成立 $\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\|<\varepsilon$，(对于 $t\in[$

特别地，取 $\varepsilon=1$，成立

$\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)=U(t,t_0)\vec{x}_0=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_0$

$=\underbrace{U(t,t_0)\vec{x}_0\dfrac{\delta}{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}}_{原来线性系统的解，并且以 \left(t_0,\frac{\vec{x}_0\delta}{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}\right) 为初值}\cdot\dfrac{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}{\delta}$

$\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\|=\left\|U(t,t_0)\vec{x}_0\dfrac{\delta}{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}\right\|\cdot\dfrac{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}{\delta}\leq\dfrac{\|\vec{x}_0\|\cdot 2}{\delta}$

"⇒" 另一方面, $\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\| = \|\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t_0)\cdot\vec{x}_0\| \le M\cdot\|\vec{x}_0\| < \varepsilon$ ...

注: (1) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$,

(a) $A(t)$ 对称. $\lambda(A(t)) < \alpha < 0$ $(t\in[t_0,+\infty))$, $\vec{x}(t)\to\vec{0}$ $(t\to+\infty)$

(b) $A(t)=A+B(t)$. $Re\{\lambda(A(t))\}<0$. 且 $\lim_{t\to+\infty}\|B(t)\|=0$ 或 $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds<+\infty$

$\vec{x}(t)\to\vec{0}$ $(t\to+\infty)$

2° $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$

(a) 零解稳定 ⟺ ∀ $Re\{\lambda(A)\} \le 0$ 并且 "=" 成立对应 Jordan 块的阶数为 1

(b) 零解不稳定 ⟺ ∃ $Re\{\lambda(A)\} \ge 0$ 并且 "=" 成立对应 Jordan 块的阶数 ≥ 2

(c) 零解渐近稳定 ⟺ ∀ $Re\{\lambda(A)\} < 0$.

设 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 是一特解. (对于系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$)

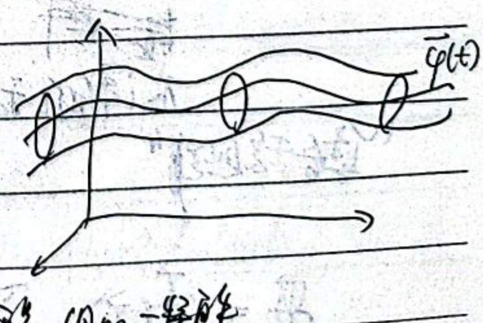
特解 $\vec\varphi(t)$ 在 Lyapunov 意义下的稳定性. 引入 $\vec{y}=\vec{x}-\vec{\varphi}(t)$

(1). ~~特解稳定~~

$$\frac{d\vec y}{dt} = \frac{d\vec x}{dt} - \frac{d\vec\varphi(t)}{dt} = \vec f(t,\vec y+\vec\varphi(t)) - \vec f(t,\vec\varphi(t))$$

$$\dot{\vec y} = \vec g(t,\vec y),\quad y^*=0$$

(2) 特解稳定 ⟺ $\lim_{\|\vec x_0-\vec\varphi(t_0)\|\to 0}\|\vec x(t,t_0,y_0) - \vec\varphi(t)\|=0$.



(3) 特解不稳定

(4) 特解渐近稳定.

例 $\begin{cases} \dot x = -a^2(t)\, y + b(t) \\ \dot y = a^2(t)\, x + c(t) \end{cases}$ 设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是该方程组的一特解.

$\frac{d\vec x}{dt}=A(t)\vec x+\vec f(t)$, 设 $\vec x(t)=\vec\varphi(t)$ 是一特解

$\frac{d\vec y}{dt} = A(t)\vec y$ $\quad \vec y = \vec x - \vec\varphi(t)$

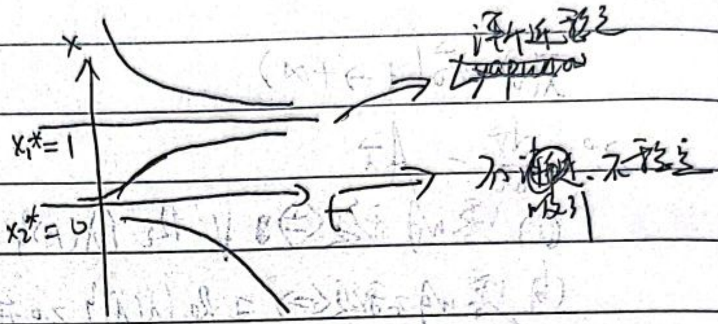
$$\begin{cases} \dot u = -a^2(t)\, v \\ \dot v = a^2(t)\, u \end{cases}$$

零解在Lyapunov意义下的稳定性.

$u^2+v^2=c^2$

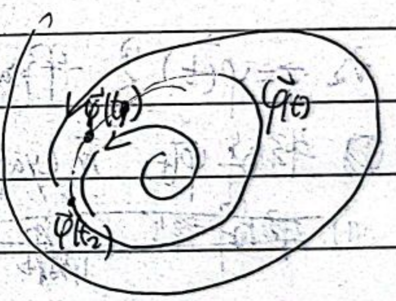
稳定, 但不吸引

例 $\dot x = x - x^2$



例 设 $\vec x=\vec\varphi(t)$ 是平面自治系统 稳定的极限圈.

问 $\varphi(t)$ 是否是 Lyapunov 意义下渐近稳定的解



在周期解上找两点 $\varphi(t_1)$ 与 $\varphi(t_2)$, $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$

$\vec x(t;\vec\varphi(t_1)) - \vec x(t;\vec\varphi(t_2))$

$=\vec\varphi(t;\vec\varphi(t_1)) - \vec\varphi(t;\vec\varphi(t_2))$

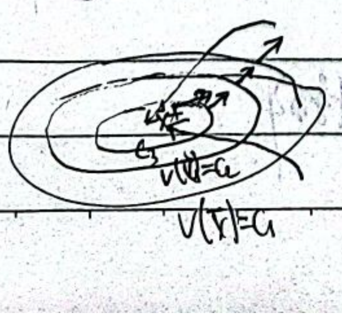
$=\varphi(t+t_1,\vec\varphi_0) - \varphi(t+t_2,\vec\varphi_0) = \vec\varphi(t+t_1)-\vec\varphi(t+t_2)\neq 0.$ [当 $t_n = n \to +\infty$ as $n\to+\infty$]

~~t_2 解~~

不渐近稳定.

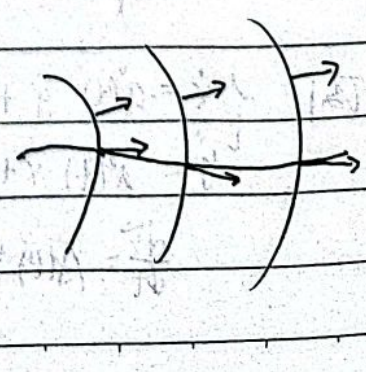
"集合稳定性"

$\frac{d\vec x}{dt} = \vec f(\vec x)$ $\quad \vec x^* = \vec 0$



grad $V\cdot\vec f \le 0$

>0



六 Lyapunov 直接方法

6.1. V函数

V: $C_H \to \mathbb{R}$ 实值函数 (C_H 包含原点).

$C_H \subset \mathbb{R}^n$.

1° 若 $V(\vec{x}) \geq 0$ (≤ 0). $V(\vec{0}) = 0$. 则称之为常正V函数 (常负V函数)

2° 若 $V(\vec{x}) > 0$, $\forall \vec{x} \in C_H \setminus \{\vec{0}\}$, 且 $V(\vec{0}) = 0$, 则称为定正V函数 (定负V函数)

3° $V(\vec{0}) = 0$. 且在包含于 C_H 中的原点任意一个邻域, 既可以取到正值, 又可以取到负值, 则称之为变号V函数

例: (1). $V(x) = -x^2$ 定负的

(2) $V(x,y) = x^2 + y^2$. 定正的

(3) $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ 若 $\vec{x} = (x_1, x_2)$, 定正的

若 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $n \geq 2$ 常正的

(4) $V(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ 二次型. A正定 $\Leftrightarrow$ 定正的

$a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$ A半正定 $\Leftrightarrow$ 常正的

(5) $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ 变号函数

☆ (6) $V(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x^3y^5$

$(x,y) \in C_H$. (H充分小), 定负函数

命题 $V(\vec{x}) = U(\vec{x}) + W(\vec{x})$ $U(\vec{x})$ ~k次齐次函数

$W(\vec{x}) = o(\|\vec{x}\|^k)$.

则 $V(\vec{x})$ 是定正的

[证明] $U(\vec{x})$ 是定正的

$U(\vec{x})$ 在 $\|\vec{x}\| = 1$ 可以取到最小值 $m > 0$

No.

Date.

一般地，$U(\vec{x}) = U\left(\|\vec{x}\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \|\vec{x}\|^k\, U\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \geq m\|\vec{x}\|^k$

对于 $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$，$\exists\, \delta > 0$，当 $\|\vec{x}\| < \delta$ 时，$|W(\vec{x})| \leq \frac{m}{2}\|\vec{x}\|^k$

$V(\vec{x}) = U(\vec{x}) + W(\vec{x}) \geq \frac{m}{2}\|\vec{x}\|^k$

☆ 一定有一道叙述并证明 Lyapunov 定理的题，并给出 m 的定理中其中一个

2, 8

94 (12)*

Lyapunov 直接法

设 V 函数沿着系统 (*) 的导数

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\vec{x}) = \text{grad} f \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ 简记为 $V_{(*)}(\vec{x})$

$G_H \to \mathbb{R}$

$\frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) = \sum_i \left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{x}(t)} \dot{x}_i(t)$

系统 (*) 的解

$\dot{x}_i(t) = f_i(\vec{x})\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}$

Lyapunov 关于零解稳定性若干判定定理

定理 6.1 （稳定）若 $V(\vec{x})$ 定正，$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}$ 常负，则系统 (*) 的零解是 Lyapunov 意义下稳定

[证明] 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，在 $\varepsilon \leq \|\vec{x}\| \leq H$ 上 $U(\vec{x})$ 可以取到最小值 $m > 0$

对于 $m > 0$，$\exists\, \delta > 0$，当 $\|\vec{x}\| < \delta$ 时，有 $V(\vec{x}) < m$.

$\delta(m) = \delta(\varepsilon)$

下证：若 $\|\vec{x}_0\| < \delta$ 则有 $\|\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$.（对于 $t \in [t_0, +\infty)$ 均成立）

如果不然，$\exists\, \tilde{t} \in [t_0, +\infty)$，使得 $\|\vec{x}(\tilde{t}; t_0, \vec{x}_0)\| = \varepsilon$

$\|\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$，$\forall\, t \in [t_0, \tilde{t})$.

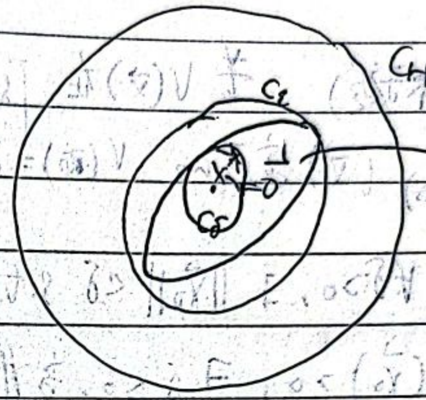
Date.

由 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 常负，$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \le 0$ ~~$V(\vec{x}(t_0)) = V(\vec{x_0}) \ge V(\vec{x}(t))$, $t \ge t_0$~~

$$m > V(\vec{x}(t_0)) = V(\vec{x_0}) \ge V(\vec{x}(t))\Big|_{t=\bar{t}} = V(\vec{x}(\bar{t})) \ge m \qquad t \ge t_0$$

$$\|\vec{x}(\bar{t})\| = \varepsilon$$

矛盾！



定理 6.2（渐近稳定）. 若 $V(\vec{x})$ 定正，$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定负，则 系统 $(*)$

的零解在 Lyapunov 意义下渐近稳定

[证明] 由定理 6.1 知 稳定，$\exists \delta > 0$, $\|\vec{x_0}\| < \delta$ 时 有 $\|\vec{x}(t, t_0, \vec{x_0})\| \le H$ （$t \in [t_0, +\infty)$ 一致成立）

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 是定负的，对于 $\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \le 0$，可知 $V(\vec{x}(t))$ 是单调递减

$V(\vec{x})$ 下有界，由此，$\lim\limits_{t\to+\infty} V(\vec{x}(t)) = V_\infty$ 并且 $V_\infty \ge 0$

下证 $V_\infty = 0$

反证法 若不然，$V_\infty > 0$. 对于 $V_\infty > 0$, $\exists \lambda > 0$, $\|\vec{x}\| < \lambda$ 时，有 $V(\vec{x}) < V_\infty$

则有 $\lambda \le \|\vec{x}(t, t_0, \vec{x_0})\| \le H$, $t \in [t_0, +\infty)$

特别地，$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 在 $\lambda \le \|\vec{x}\| < H$ 可以取到一个最小值，记为 $l > 0$

$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x}) \ge l$. $\frac{dV(\vec{x}(t; t_0, \vec{x_0}))}{dt} \le -l$.

$V(\vec{x}; t_0, \vec{x_0}) \le V(\vec{x_0}) - l(t - t_0)$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$

$\to -\infty$，矛盾！

Date.

这意味着 $V_{\infty}=0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\vec{x}(t)) = 0$.

对于 $\forall \varepsilon>0$, $\min\limits_{\varepsilon\le\|\vec{x}\|\le H} V(\vec{x}) = m > 0$.

对于 $m>0$, $\exists T>0$, 当 $t\ge t_0+T$ 时, 有 $V(\vec{x}(t)) < m$.

$\|\vec{x}(t)\| < \varepsilon$

定理 6.3 (不稳定) 若 $V(\vec{x})$ 在原点任何一个邻域中都能取得到正值, 并且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正的, $V(\vec{0})=0$ 则 系统(*)的零解在 Lyapunov 意义下不稳定

[证明] 对于 $\forall \delta>0$, $\exists \|\vec{x}_0\|<\delta$ s.t $V(\vec{x}_0)>0$. 若 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<H$ $(t\in[t_0,+\infty)$

对于 $V(\vec{x}_0)>0$, $\exists \lambda>0$. 当 $\|\vec{x}\|<\lambda$ 时. 有 ~~$\|V(\vec{x})\|<\|V(\vec{x}_0)\|$~~ $V(\vec{x})<V(\vec{x}_0)$

断言 $\lambda\le\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|\le H$.

($V(\vec{x}(t))$ Lyapunov 函数 ... 单调增)

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正, 在 $\lambda\le\|\vec{x}\|\le H$ 可取到最小值 $l>0$.

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}\ge l$. $\vec{x}(t)\ge V(\vec{x}_0)+l(t-t_0)$

令 $t\to+\infty$ $\vec{x}(t)\to+\infty$.

故 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<H$ 不成立.

定理 6.4 (不稳定) 将 6.3 的 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正改为 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})\ge\lambda V(\vec{x})$ $(\lambda>0)$

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}\ge\lambda V(\vec{x}(t))$, $\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}-\lambda V(\vec{x}(t))\ge 0$.

Date.

$$e^{-\lambda t}\left[\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}-\lambda V(\vec{x}(t))\right]\geq 0.$$

$$V(\vec{x}(t))\geq V(\vec{x}_0)\cdot e^{\lambda(t-t_0)}\to+\infty.\ (t\to+\infty)$$

$\vee$ 0.

例：$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\omega y+x(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=\omega x+y(x^2+y^2)\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2).$

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=\frac{\partial V}{\partial x}(-\omega y+x(x^2+y^2))+\frac{\partial V}{\partial y}(\omega y+y(x^2+y^2))$$

$$=x^2(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2>0.\ 定正的$$

由 6.3. 不稳定

由 Lyapunov 定理，0 为中心/焦点

故 0 为不稳定的焦点

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\omega y-x(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=\omega x-y(x^2+y^2).\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y)=-(x^2+y^2)^2<0.$ 定负. 渐近稳定

例1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+y(x+y)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-x(x+y)\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2).$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y)=-x^2\leq 0$，常负，稳定

Date.

T例. $\begin{cases} \dot{x} = x+3y+xy^2 \\ \dot{y} = 3x+y-x^2y \end{cases}$

$V(x,y)=x^2-y^2$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y) = 2(x^2-y^2)+4x^2y^2 \geq 2V(x,y)$ 不稳定

例. $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$

$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-by-\frac{g}{l}\sin x \end{cases}$ $V(x,y)=\frac{1}{2}m(ly)^2+mgl(1-\cos x)$

$V(x,y)$ 定正

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y) = -mbl^2y^2$ 常负 $S=\{(x,y)\in G_H \mid y=0\} \supset (x(t),y(t))$ 将 $\vec{x}=(x(t),0)$ 代入方程可知 $x(t)=0,\ y(t)=0$

稳定.

定理6.15 若 $V(\vec{x})$ 定正, $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 常负,

集合 $S=\{\vec{x}\in G_H \mid \frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=0\}$ 中不包含方程(*)

非零的轨道, 则方程(*)的零解在Lyapunov意义下渐近稳定

例: $\dot{x}=-x^2$

$V(x)=e^x$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x) = -e^x x^2 < 0$

注: $V(x)$ 不是定正的! $V(0)\neq 0$

期末复习

chapter 4.

存在唯一性：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在 $\bar R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}$ 上二元连续，并关于 x 满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0$，$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$，$\forall (t,x),(t,y)\in\bar R$，则方程的解在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$

$M=\max\limits_{(t,x)\in\bar R}|f(t,x)|$

注：一个充分条件为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $\bar D$（闭有界，凸集）上连续

注：一般地，$f(t,x)$ 在 D 上连续，且 $f(t,x)$ 关于 x 于 D 上满足局部 Lipschitz 条件，则 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$，$x(t_0)=x_0$ 的解存在唯一

特别地，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 上连续

解的延展：

定理1：设 (1) D 为有界区域，$f(t,x)$ 于 D 上连续，且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件 (2) 再设 $x(t)$ 为 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的饱和解，(α,β) 为最大存在区间，且存在 $\{t_n\}$，$t_n\to\beta-0\ (n\to+\infty)$，$x(t_n)\to c\ (n\to+\infty)$，则 $(\beta,c)\in\partial D$

定理2：若定理1的 (1)(2) 成立，且 $\bar D_1\subset D$ 为 D 内闭子区域，则 $\exists\delta>0$，当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $(t,x(t))\notin\bar D_1$

定理3：若定理1的 (1)(2) 成立，记 $\rho(t)\triangleq \mathrm{dist}((t,x(t)),\partial D)$，$\mathrm{dist}(p,A)=\inf\limits_{q\in A}\|p-q\|$，则 $\lim\limits_{t\to\beta-0}\rho(t)=0$

$\lim\limits_{t\to\alpha+0}\rho(t)=0$

定理4：若 D 为无界区域，$f(t,x)$ 于 D 上连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，$x(t)$ 为饱和解，(α,β) 为最大存在区间，

则以下情形必居其一：1° $\beta=+\infty$，2° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 无界，3° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 有界，$\mathrm{dist}((t,x(t)),\partial D)\xrightarrow[(t\to\beta-0)]{}0$

压缩映照原理：

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在 $\bar R=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}$ 上二元连续，且关于 x 满足 Lipschitz 条件，L 为 Lipschitz 常数，

则方程的解在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$

证明思路：(1) 令 $\|\varphi\|_L=\max\limits_{t\in[t_0-h,t_0+h]}e^{-L|t-t_0|}|\varphi(t)|$，则 $(\Omega,\|\cdot\|_L)$ 完备，Ω 为 $\bar R$ 全体连续函数集，~~(2) 证明压缩性~~，

(2) 令 $A\varphi=x_0+\int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds$，证明 $A\varphi\in\Omega$，(3) 证明压缩性，即 $\forall\varphi,\psi\in\Omega$，有 $\|A\varphi-A\psi\|_L\le\theta\|\varphi-\psi\|_L$

其中 $\theta\in(0,1)$，事实上 $\theta=1-e^{-L\cdot 2a}$

解关于初值函数的依赖性：

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在区域 D 上连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，设 $\varphi(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个解，则存在 $\eta>0$，当 $|x_0-\varphi(t_0)|\le\eta$ 时 ($t_0\in[a,b]$)，则有 1° $x(t;t_0,x_0)$ 在 $[a,b]$ 上存在；2° $x(t;t_0,x_0)$ 在 $\{(t,t_0,x_0)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in[a,b],\ t_0\in[a,b],\ |x_0-\varphi(t_0)|\le\eta\}$ 上三元连续

No.

Date.

解关于~~初值、参数~~右端函数的连续依赖性

$(CP)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ $(CP)_g\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)+g(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，设 $x(t;t_0,x_0)$ 表示(CP)的解，$t\in[a,b]$，

若 $\|g\|<\delta\ll 1$，则 $y(t;t_0,x_0)$ 表示 $(CP)_g$ 的解在 $[a,b]$ 上亦存在。

解关于参数的连续依赖性.

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x,\mu)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x,\mu)$ 在区域 Ω 上关于三元连续，且关于 x 满足局部Lipschitz条件. 设 $\varphi(t;\mu_0)$ 为 $[a,b]$ 上的解，则 $\exists\eta>0$，当 $|\mu-\mu_0|<\eta$ 时，方程之解 $x(t;\mu)$ 在 $[a,b]$ 上存在，且关于 (t,μ) 二元连续

~~Chapter 5.~~ 方程组的存在唯一性

定理1：$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$，$\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 Ω 内是关于 $t,\vec{x}$ 的连续函数，且满足关于 $\vec{x}$ 局部Lipschitz条件，则方程的解存在唯一

Chapter 5.

自治系统的性质.

(平移不变性) 1. 设 $\vec{x}(t)$ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 的任一解，则 $\vec{x}(t+C)$ 亦是方程的解

(群的性质) 2. 设 $\vec{x}(t;\vec{x}_0)$ 表示从 $(0,\vec{x}_0)$ 出发的自治系统的轨线，则 $\vec{x}(t_1+t_2;\vec{x}_0)=\vec{x}(t_2,\vec{x}(t_1;\vec{x}_0))$，$\forall t_1,t_2$

3. 自治系统的轨线不相交

4.(1) $\vec{x}^*$ 为自治系统的奇点，$\vec{x}_0\neq\vec{x}^*$，若 $\vec{x}(t;\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to\beta^{+0}_{-0})$，则 $\beta=+\infty$ 或 $-\infty$

(2) 若 $\vec{x}(t;\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to{}^{+\infty}_{-\infty})$，则 $\vec{x}^*$ 为系统的奇点，即 $\vec{f}(\vec{x}^*)=\vec{0}$

平面自治系统奇点分类

对 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$，$\vec{x}\in R^2$，$\det A\neq 0$，$\vec{x}^*=\vec{0}$ 为唯一奇点的自治系统，λ_1,λ_2 为A的特征值

1° $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ (1) $\alpha>0$ 不稳定焦点 (2) $\alpha=0$ 中心 (3) $\alpha<0$ 稳定焦点

2° (1) $\lambda_1>\lambda_2>0$，不稳定结点，$t\to+\infty$ 时，$x(t)$ 与 $\vec{r}_1$ 平行；$t\to-\infty$ 时，$x(t)$ 与 $\vec{r}_2$ 平行

(2) $\lambda_1<\lambda_2<0$，稳定结点，$t\to+\infty$ 时，$x(t)$ 与 $\vec{r}_2$ 平行；$t\to-\infty$ 时 $x(t)$ 与 $\vec{r}_1$ 平行

临界结点

3° $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ (1) 若具有完整的特征系，则为临界结点，$\lambda>0$ 时不稳定，$\lambda<0$ 时稳定

(2) 若无完整的特征系，则为退化结点，$\lambda>0$ 时不稳定，$\lambda<0$ 时稳定

4° $\lambda_1>0>\lambda_2$，为鞍点

极限环的计算：多作变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，$x^2+y^2=r^2$，$\Rightarrow x\dot{x}+y\dot{y}=r\dot{r}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$，$\dot{\theta}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2}$

~~极限环存在判断~~

极限环存在判定法 (Bendixon定理): $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$，$D$为环域，$D$中和$D$的边界上无系统的奇点，且系统的轨线在环域$D$的边界上，同时进入或离开$D$，则$D$中一定存在一个系统的极限环 (计算 $\vec{n}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}=(P,Q)$)

闭轨线不存在判别法 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$

1.(切性判别法) 设$F(x,y)$有连续的一阶偏导数于S中，且 $\mathrm{grad}F\cdot(P,Q)=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot P+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot Q$ 保持常号于S中，若$\Omega=\{(x,y)\in S\mid \frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot Q=0\}$中不含系统的整条非奇点的整条轨线，则系统于$S$中无闭轨线.

2.(Bendixon判别法) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$，设$S$为单连通区域，$P,Q$于$S$中有连续的一阶偏导数，~~$\mathrm{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$~~ $\mathrm{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 保持常号，且不在S的任一子区域中恒为0，则系统于S中不存在闭轨线

3.(Dulac判别法) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$ 设S为单连通区域，(P,Q)连续可微，若存在函数$B(x,y)\in C^1(S)$且在S中，$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ 保持常号，且不在S中任一子区域中恒为0. 则系统于S中不存在闭轨线

Lyapunov稳定性，零解稳定性的定义.

(稳定)：对 $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$，$\forall\varepsilon>0$, $t_0\in I$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$, $\forall\|\vec{x_0}\|<\delta$, $\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x_0})$ 在$t_0\le t<+\infty$中满足 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x_0})\|<\varepsilon$，则系统的零解稳定

(不稳定). 若$\exists\varepsilon_0>0$, $t_0\in I$, $\forall\delta>0$, $\exists\vec{x_0}$满足$\|\vec{x_0}\|<\delta$及时刻$t_1>t_0$，使$\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x_0})$满足$\|\vec{x}(t_1;t_0,\vec{x_0})\|\ge\varepsilon_0$，则系统的零解不稳定.

(吸引). 设B是包含原点的一个区域，$\forall x_0\in B$, $\forall\varepsilon>0$, $t_0\in I$, $\exists$时刻$T=T(\varepsilon;t_0,x_0)$，使$t>t_0+T$时，系统的解$\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x_0})$满足$\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x_0})\|<\varepsilon$，则系统的零解是吸引的

线性系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}$ 的零解

(1) 系统的一切解在$[t_0,+\infty)$上有界 $\Longleftrightarrow$ 系统的零解稳定

(2) 系统的一切解满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t)\|=0$ $\Longleftrightarrow$ 系统的零解是渐近稳定的

几种特殊的线性系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}$

1. $A(t)$对称，$\lambda(A(t))<\alpha<0$，$(\forall t\in[t_0,+\infty))$. 则 $\vec{x}(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$. $\Rightarrow$ 渐近稳定

2. $A(t)=A+B(t)$. $\mathrm{Re}(\lambda(A(t)))<0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\|B(t)\|=0$ 或 $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds=0$，则$\vec{x}(t)\to 0$，渐近稳定

3. $A(t)=A$，则零解稳定 $\Longleftrightarrow$ $\forall\mathrm{Re}(\lambda(A))\le 0$ 且等号成立对应Jordan块阶数为1

零解不稳定 $\Longleftrightarrow$ $\exists\mathrm{Re}(\lambda(A))\ge 0$ 且等号成立对应Jordan块阶数≥ 2

零解渐近稳定 $\Longleftrightarrow$ $\forall\mathrm{Re}(\lambda(A))<0$

No.

Date.

Lyapunov 直接方法　　定义 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x)$

1. 零解稳定：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$V(\vec{x})$定正，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$常负，则原系统在Lyapunov意义下稳定。

2. 零解渐近稳定：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$V(\vec{x})$定正，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$定负，则原系统在Lyapunov意义下渐近稳定

3. 零解不稳定I：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$V(\vec{x})$在原点任一邻域中总能取到正值，$V(\vec{0})=0$，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$定正，则系统在Lyapunov意义下不稳定。

4. 零解不稳定II：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$V(\vec{x})$在原点任一邻域总能取到正值，$V(\vec{0})=0$，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})\geq\lambda V(\vec{x})$

其中 λ 为正的常数，则系统在Lyapunov意义下不稳定。

线性自治系统的 Lyapunov 函数

命题1. 设 C 为定正，对称的矩阵，则Lyapunov方程：$A^TB+BA=-C$ 具有定正，对称的解矩阵 B

$B \Leftrightarrow R_e(\lambda(A))<0$　　（注：$B=\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}dt$）

命题2. 设 C 为对称阵，A的任一两特征值满足 $\lambda_k+\lambda_l\neq0$，$k,l=1,2,\cdots,n$，则Lyapunov方程

$A^TB+BA=-C$ 有对称的解矩阵 B　　~~（注：$B=\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}dt$）~~

一次近似理论

设方程 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 有零解 $\vec{x}^*=\vec{0}$，则系统(1) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})$，$A=Df(\vec{0})$，$\vec{g}(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$

系统(2) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$，$A=Df(\vec{0})$，则下列命题成立：

1° 若系统(2)零解渐近稳定，则系统(1)零解亦渐近稳定

2° 若系统(2)的系数矩阵A存在实部大于0的特征值，则系统(1)的零解是不稳定的 ~~渐近未决定~~

No.

Date.

用Lyapunov直接方法判定

系统 (*) $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$ 的零解的各种性质

判定定理

V函数 $\begin{cases} \text{定正} \\ \text{全导数 } \dot{V}|_{(*)}(\vec{x}) \text{ 定负} \end{cases}$ / $\vec{S}=\{\vec{x}\in G_H \mid \dot{V}|_{(*)}(\vec{x})=0\}$

↓

Lyapunov函数. $V(\vec{x})=x^2+y^2$, x^2-y^2, $\vec{x}^T B\vec{x}$

反之 若系统的零解在Lyapunov意义下渐近稳定, 问V函数是Lyapunov函数? (反问题)

七 Lyapunov函数的存在性

线性: $A\vec{x}$, 零解渐近稳定的 $\Longleftrightarrow$ $\forall \operatorname{Re}\{\lambda(A)\}<0$

命题: 对任给C是定正对称的矩阵, 若以下矩阵方程

(Lyapunov方程) $A^TB+BA=-C$

具有定正、对称的解矩阵 B $\Longleftrightarrow$ $\forall \operatorname{Re}\{\lambda(A)\}<0$

[证明] "$\Rightarrow$" $V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 定正的

$=\langle B\vec{x},\vec{x}\rangle$

$\dot{V}_{(*)}|(\vec{x})=\langle B\dot{\vec{x}},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},\dot{\vec{x}}\rangle=\langle BA\vec{x},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},A\vec{x}\rangle.$

$=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}=-\vec{x}^TC\vec{x}$ 定负

则 系统(*)的零解是渐近稳定的.

$\Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda(A)\}<0.$

"$\Leftarrow$" $B\triangleq\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}\,dt$

1° 收敛的 (指数衰减) $\|e^{At}\|\le Me^{-\alpha t}$ ✓

2° 对称性 $B=B^T$

3° 定正的, $\forall\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}^TB\vec{y}=\int_0^{+\infty}\underline{\vec{y}^Te^{A^Tt}}\cdot C\cdot\underline{e^{At}\vec{y}}\,dt>0$ (向量) (定正的)

4° $\int_0^{+\infty}[A^Te^{A^Tt}Ce^{At}+e^{A^Tt}C\cdot e^{At}\cdot A]\,dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}[e^{A^Tt}Ce^{At}]\,dt=-C$

Date.

命题7.2：A $\lambda_k+\lambda_l\neq 0$ $k,l=1,2,\cdots,n$

$A^TB+BA=-C$，C对称

则 Lyapunov 方程有对称的解矩阵 B. （证明见书）.（用高代方法中可证）

利用命题7.2的结论证明命题7.1的充分性

条件 1° $\forall Re\{\lambda(A)\}<0$ 2° C正定对称

根据命题7.2 解矩阵 B 存在，以下证 B 正定的

若不然. 1° 对于 $\vec{x_0}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x_0}^TB\vec{x_0}<0$. $V(\vec{x})=-\vec{x}^TB\vec{x}$ 在原点任意邻域都取得到正值（可以压缩 $\vec{x_0}$，取 $t\vec{x_0}$）.

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=\vec{x}^TC\vec{x}$正定，考虑是不稳定的 $\Rightarrow$ 矛盾

2° $\exists\vec{x}^*\underset{\neq 0}{\in}\mathbb{R}^n$，$\underbrace{\vec{x}^{*T}B\vec{x}^*}_{=\|B^{\frac{1}{2}}\vec{x}^*\|^2}=0$，其中B是半正的. $B=B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$

$=0\Rightarrow B^{\frac{1}{2}}\vec{x}^*=\vec{0}$

$\Rightarrow B\vec{x}^*=0$，$A^TB+BA=-C$，$0=-\vec{x}^*C\vec{x}^*$，矛盾！

~~$V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$~~

取 $m\vec{x}^T\vec{x}<V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}<M\vec{x}^T\vec{x}$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=-\vec{x}^T\vec{x}$

$\dot{V}|_{(*)}(\vec{x})=-\vec{x}^T\vec{x}\le-\frac{1}{M}\vec{x}^TB\vec{x}\le-\frac{1}{M}V(\vec{x})$.

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}\le-\frac{1}{M}V(\vec{x}(t))$.

$m\|\vec{x}\|^2\le V(\vec{x}(t))\le V(\vec{x_0})\exp(-\frac{1}{M}t)$

$\le M\|\vec{x_0}\|^2\exp(-\frac{1}{M}t)$

$\|\vec{x}(t)\|\le\sqrt{\frac{M}{m}}\|\vec{x_0}\|\exp(-\frac{1}{2M}t)$.

八 一次近似理论

$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$\vec{x}^*=\vec{0}$

(1) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+g(\vec{x})$，$A=D\vec{f}(\vec{x})$，$g(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$

(2) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$

No.

Date.

命题 8.1 1° 若系统 (2) 零解渐近稳定的，则系统 (1) 的零解亦是渐近稳定的。

2° 若系统 (2) 的系数矩阵 A 存在实部大于零的特征值，

则系统 (1) 的零解是不稳定的。

[证明] 1° $A^TB+BA=-C$ 是有唯一正定对称解矩阵 B。

$V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 正定。

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}(\vec{x})=\langle B\dot{\vec{x}},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},\dot{\vec{x}}\rangle$

$=\langle B(A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})),\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})\rangle$

$=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}+\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})+\vec{g}^T(\vec{x})B\vec{x}$

$=-\vec{x}C\vec{x}+\underbrace{2\vec{x}B\vec{g}(\vec{x})}_{o(\|\vec{x}\|^2)}$ 定负的

由定理 6.2 知 稳定成立。

2° $A-\varepsilon I$ 特征值 满足 $\lambda_k+\lambda_l\neq 0$ $(k,l=1,2,\cdots,n)$.

ε 足够小

$(A-\varepsilon I)^TB+B(A-\varepsilon I)=-C$ ← 对称的，正定的

根据命题 7.2. 以上 Lyapunov 方程 有唯一解矩阵

断言 B 是非常负定的

若不然 1° $\hat{V}(\vec{x})=-\vec{x}^TB\vec{x}$ 正定

$\frac{d\hat{V}}{dt}\Big|_{(A-\varepsilon I)}(\vec{x})=\vec{x}^TC\vec{x}$ 定(正) 与 $\vec{x}=(A-\varepsilon I)\vec{x}$ 的零解不稳定矛盾

2. 常负，$\vec{x}^*\neq 0$，$\vec{x}^{*T}B\vec{x}^*=0$，同上可证 矛盾

故 $V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 在原点任意邻域内都可取到正值

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)}(\vec{x})=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})$

$=-\vec{x}^TC\vec{x}+2\varepsilon\vec{x}^TB\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})$

$=2\varepsilon V(\vec{x})-\vec{x}^TC\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})\geq 2\varepsilon V(\vec{x})$

由命题 6.4，系统的零解不稳定。

No.

Date. . . .

常微分方程

一、(CP) $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0} \end{cases}$, $\vec{x}\in R^n$

1° 初值问题的存在唯一性 (逐次逼近法, 压缩映像原理)
↳ 局部的
度量空间, 完备性, $A\Omega\to\Omega$, 压缩

2° 解的延展 (最大存在区间 有限, 无限)

3° 解关于初值, 参数的连续依赖性 (有限闭区间如$[a,b]$上)
(对具体问题论证).

用结论证明: $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt}=A_n\vec{x}+\vec{f}(t) \\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0 \end{cases}$

不等式: Gronwall 不等式 (证明与应用)

二. $f(t,\vec{x})=A\vec{x}+\vec{f}(t)$

$\vec{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds$, 常数变易公式

特别地 $n=2$ 时 二阶方程 常系数 $n\geq 2$ 高阶 常系数方程

常数变易公式

三. $f(t,\vec{x})=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)$

$\vec{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

1° 初值问题的存在唯一性

2° $\vec{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{c}+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

$\Phi(t)$是对应齐次方程组的基本解

$U(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$

刘维尔公式: $W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}tr(A(s))ds\right)$

特别地 $n=2$时 二阶线性方程

齐次方程 $x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$

非齐次方程 $x(t)=x_1(t)+\int_{t_0}^{t}k(t,s)f(s)ds$ $k(t,s)=\dfrac{\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s)\\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)} dt$$

△不能解法 (分离变量，一阶线微分方程，高阶方程降阶，高阶线微分方程组)

四. 定性理论初步

1°. 自治系统基本性质 (平移不变性，群的性质，积分线相交性质…)

2°. 线性自治系统的奇点分类 (中心，焦点，结点，鞍点，退化结点，奇结点)

稳定，不稳定 稳定结点，不稳定结点

3°. Perron定理 (一次近似系统)

第一章定理 焦点，结点 (鞍点，退化) 奇结点 (直接给类型与稳定性)

第三定理 中心 → 中心，焦点，中心焦点

4°. 极限圈，闭轨线 (计算子标准型，随参数变化过程描述)

(判别法：存在性 — 环域定理 不存在 — 切性曲线法 Dulac判别法)

5°. Lyapunov函数的若干稳定性定义 … (稳定，不稳定，渐近稳定)，全局渐近稳定

6° —— 判断

7° 直接方法 V函数定义 (Lyapunov判别定理 (稳定，渐近稳定，不稳定) 全局稳定判别

(V正定，$\dot{V}_{(*)}$ 负定，$S=\{\dot{V}_{(*)}=0\}$ 不包含非零的轨线，则稳定)

8° V函数存在性

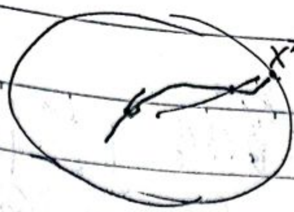
线性自治系统 $A^TB+BA=-C$

基于V函数对于解的变化的收敛与发散进行判断

1° 一次近似理论 $D\vec{f}(\vec{0})=A$，$\forall\, Re(\lambda(A))<0$，渐近稳定

$\exists\, Re(\lambda(A))>0$，不稳定

Date.



P148.

当 $t \to \beta-0$，几何长度有限

$\cancel{S(t) \longrightarrow S_\beta(\beta-0)}$ $\qquad S_\beta < +\infty$

$$\frac{dS(t)}{dt} \le \rho(x(t), \partial\Omega) \le \rho(x(t), x^*) \le S_\beta - S(t).$$

$$\left(\frac{dS(t)}{dt} = \left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\|_2 = \left\| \frac{\rho f(x)}{(\rho+1)(\|f(x)\|+1)} \right\|_2 \le \rho\right.$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} \le S_\beta - S(t).$$

$$\cancel{\left(e^{S(t)}\right)' = e^{S(t)}e^{t} + e^{S(t)}e^{t} \le e^{S(t)} \cdot e^{t} \cdot S_\beta}$$

$$t - t_0 \ge \ln \frac{S_\beta}{S_\beta - S(t)} \qquad t \to \beta - 0.$$

$$H(P, \xi) = p^4 + \lambda \xi^2$$

$$[\xi] \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + x y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^3 + \dfrac{\xi}{\lambda} x^4 y \end{cases}$$

(1) 若 $\Phi(x,y) = e^{\cdots}$ 是 $[\xi_0]$ 的一个首次积分，确定 ξ_0。证。

(2) 若 $\xi \ne \xi_0$，证明 相平面中无系统 $[\xi]$ 的闭轨线

(3) 若 $\lambda > 0$，$\xi < \xi_0$，判断是否存在 Lyapunov 函数 下 的稳定性

(4) 关于参数的连续依赖性 ? (5) 解存在唯一性（压缩映射原理）。

(1) $\lambda = 1$, $\cancel{\frac{\xi_0}{\lambda} = -2}$, $\xi_0 = -2$ $\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q(x,y) =$

(2) $\cancel{y^2 + 3x^2 + \frac{\xi}{\lambda}x^3 y}\ \Phi(x,y) = (4+2\xi)\, x^4 y^2$ 保持符号

$$\{\Phi = 0\} = \{x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$$

$$\{x(t), y(t)\} \subset \{x = 0 \text{ 或 } y = 0\} \qquad \Rightarrow x(t) = y(t) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) \equiv 0,\ y(t) = ? \qquad \Rightarrow x(t) = y(t) = 0$$

$$y(t) \equiv 0,\ x(t) = ?$$

(3) $V(x,y) \triangleq \Phi(x,y)$. 正定

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)} = (4+2\xi)\, x^4 y^2 \quad \text{常负}.$$

No.

Date.

设 f 连续，若 $\exists\, k>0$ 使得 $\int_0^{+\infty} |f(t)-k|\, dt < +\infty$.

试证明：$\ddot{x} + f(t)x = 0$ 的零解在 Lyapunov 意义下稳定

$\Leftrightarrow$ 解有界 $\quad \ddot{x} + kx + f(t)x - kx = 0.$

$$\ddot{x} + kx = kx - f(t)x = \big(k - f(t)\big)x$$

$\lambda^2 + k$

$$\cancel{x(t) = C_1 e^{\sqrt{-k}t} + C_2 e^{\sqrt{-k}t} + \int_0^t \frac{e^{\sqrt{-k}(t-s)} - e^{-\sqrt{-k}(t-s)}}{2\sqrt{-k}} \cdot \big(k-f(s)\big)x(s)\,ds}$$

$$x(t) = \big(C_1 \cos\sqrt{k}\,t + C_2 \sin\sqrt{k}\,t\big) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\sqrt{k}(t-s) \cdot \big(k - f(s)\big)x(s)\,ds$$

$$\cancel{x(t) \le \big(C_1 \cos\sqrt{k}\,t + C_2 \sin\sqrt{k}\,t\big) \cdot \exp\Big(\int_0^t \frac{1}{k}}$$

$\le \cdots$

(Gronwall) $x(t) \le \cdots$

设 $\ddot{x} + a(t)x = 0$ 零解稳定.

$$\int_0^{+\infty} |b(t)|\, dt < +\infty$$

设 $\ddot{x} + \big(a(t) + b(t)\big)x = 0$ 零解稳定.

$$\ddot{x} + a(t)\cdot x = -b(t)\cdot x(t) \qquad \text{有界?}$$

$$x = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \int_0^t K(t,s)\, f(s)\, ds, \quad f(s) = -b(s)x(s)$$

$$K(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2(s) & \varphi_2(t) \end{vmatrix}}{W(s)} \quad \text{有界}$$

↳ Liouville 公式算有界

设 $x(t) = e^{-2t}$ 是 $(2t+1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$ 的一个解.

则 该方程的零解在 Lyapunov 意义下 <u>不稳定</u>

No.

Date.

若 $\xi(t)=t$, $\eta(t)=t\cos 2t$ 为方程 $\ddot{x}+x=m(t,x)$ 的解
问是否存在连续可微的 $m(t,x)$ 使得上述成立？存在的话求出 $m(t,x)$

从 $x=0$, $\dot{x}=1$ 出发 ~~不唯一~~ 有两条积分曲线，矛盾！

压缩映像原理证明边值问题？

总结 代数逼近 1.3 下午 & 1.4 上午

例：平面自治系统 无极限环

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx+dy\end{cases}$$

考虑 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$，~~若~~ 不变号 无

$=0$ 时，利用 P182 11 结论

P194 12 (1) √ . (2) 解关于初值连续依赖性 √.

(3) √ (4) ×

$$\begin{cases}\dot{x}=2y\\ \dot{y}=-2x-p(t)y^3\end{cases}$$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\frac{dV}{dt}=-p(t)y^4$

任意解有界

$V(x(t),y(t))\to V_\infty<+\infty$

$V(x(t),y(t))-V(x_0,y_0)=\int_{t_0}^{t}-p(s)y^4(s)ds$

$\int_{t_0}^{+\infty}y^4(s)ds<+\infty$ 控制 $(y^4)'$ 有界

$\Rightarrow y(t)\to 0$

Date.

$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t}\\ e^{t} & e^{-t}\end{pmatrix}$, $\Psi(t)=\begin{pmatrix} e^{t-1} & e^{-t+1}\\ e^{-t+1} & e^{t-1}\end{pmatrix}$

若 矩阵值函数 为 $\dot{x}=Ax$ 基本解方程组时, 求 A, e^{At}, $|e^{At}|$, $\|A\|$.

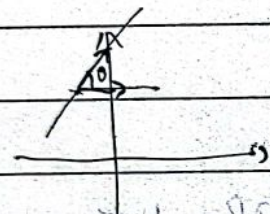
$|\Psi(t)|=e^{2t-2}-e^{-2t+2}$, 当 $t=1$ 时 $|\Phi(t)|=0$ ×.

若 n阶方程 $x^{(n)}+tx=g(t,x)$ → 高阶的

(t_0,x_0) 为 积分曲线上一点.

过 (t_0,x_0) 积分曲线的切线与 Ot轴正向夹角为 θ

则确定 这样的一积分曲线: 条



$\frac{dx}{dt}(t_0)=\pm\tan\theta$

$x(t_0)=x_0$

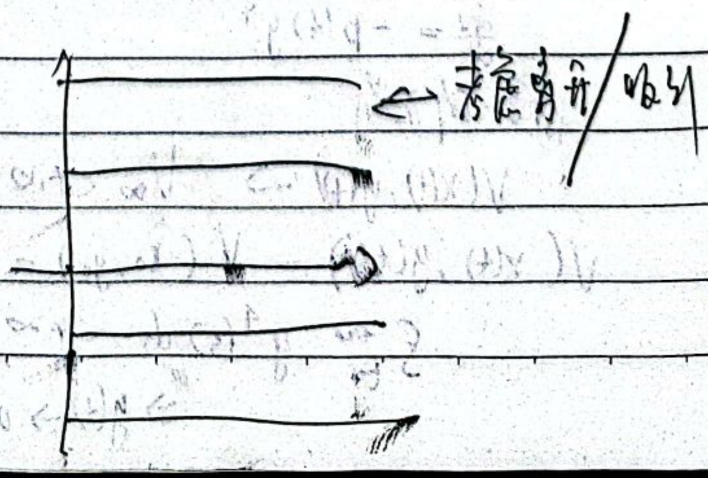
分情况讨论

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^4x^2\cos x}{t^2+x^2}$$

(1) 用压缩映像原理证明初值问题解存在唯一性

(2) 在 $t-O-x$ 平面上画出大致的积分曲线

(3) 确定任意常值解在 Lyapunov意义下的稳定性



张静东 20110180044@fudan.edu.cn
宋达 songd@fudan.edu.cn
办公楼 光华 楼 418

No.
Date.

例1. 求确定一条曲线 Γ，过曲线上 (t,x) 上任意一点的曲线的切线与该点与坐标原点的连线垂直.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \quad \text{一阶常微分方程.}$$

$$x^2+t^2 = C \quad (C>0) \quad \text{圆}$$

例2.
$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \lambda>0. \quad \text{Malthus 模型 种群自然增长}$$

$$\lambda<0 \quad \text{放射性元素的衰变模型}$$

一阶线性常系数.

$\lambda = \lambda(t)$：变系统 非自治

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N + f(t) \longrightarrow \text{非齐次项（系统设计的）}$$

$N(t) = C\cdot e^{\lambda t}$ $(C\in R)$ 是 (*) 的通解 $N(t)=0$，常值特解

⟶ 无穷多个解

$$(CP)\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(t_0) = N_0 \quad \text{初始条件} \end{cases}$$

$$(CP')\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

令 $T = t - t_0$, $t = T + t_0$, $N(t) = N(T+t_0)$

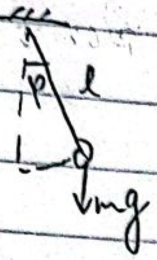
$$\lambda N(T+t_0) = \frac{dN}{dt} = \frac{dN(T+t_0)}{dT}\cdot\frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dF(T)}{dT} = F(T) \\ F(0) = N_0 \end{cases}$$

作业：if $\lambda = \lambda(t)$. t 混合. 则初值问题还相等吗？

例3. 单摆模型

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$ 二阶常微分方程. 非线性. 自治.



引入 $y=\frac{d\varphi}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}=y \\ \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \end{cases}$$

初值问题 一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \varphi(0)=\varphi_0 \\ y(0)=\omega_0. \end{cases}$$

常值解 $(k\pi,0)$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

一次近似
$$\begin{cases} \dot\varphi=y \\ \dot y=-\frac{g}{l}\varphi. \end{cases}$$

例4. Lorentz系统 chaos

一阶非线性自治的ODE组
$$\begin{cases} \dot x=\sigma(y-x) \\ \dot y=rx-y-xz \\ \dot z=xy-bz \end{cases}$$
其中σ, r, b为参数

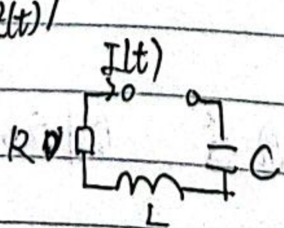
$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \\ z(0)=z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0+\delta \\ z(0)=z_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \hat x(t) \\ \hat y(t) \\ \hat z(t) \end{pmatrix}$$

作业2: 常值解

例5. LRC电路.



$$RI-L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt=e(t)$$ 微分积分方程

No.

Date.

① $RI + L\dot{I} + \frac{1}{C}I = e(t)$

② 引入 $y(t) = \int_0^t I(t)\,dt$ 二阶常系数 非齐次方程

$R\dot{y} + L\ddot{y} + \frac{1}{C}y = e(t)$

例 7. 神经网络模型

$\frac{d\vec{x}}{dt} = -R\vec{x} + \underbrace{W\vec{f}(\vec{x})}_{network} + \underline{\vec{I}(t)}$ 外界刺激

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$